

Elément Constitutif 1 (EC 1) : Topologie de $\mathbb{R}$ (10 pts)

Toutes les questions sont indépendantes.

- (1) Autour du théorème d'Archimède dans $\mathbb{R}$
 - Énoncé la propriété d'Archimède dans $\mathbb{R}$. (0.25 pt)
 - Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < a < n$. (1.25 pt)
- (2) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ définie par : $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 - 3r + 1 < 0\}$. On veut montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.
 - a. Que signifie $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$? (0.25 pt)
 - b. Se servir du a.) pour montrer que A est non vide. (1 pt)
 - c. Donner un minorant 'trivial' et un majorant 'trivial' de A . Puis conclure. (0.75 pt)
- (3) Démontrer les égalités des ensembles suivants. (on procèdera par double inclusion)
 - i. $\bigcup_{n \geq 1} [\frac{1}{n}, 1[=]0, 1[$ (1 pt)
 - ii. $\bigcap_{n \geq 0} [n, +\infty[= \emptyset$ (1 pt)
- (4) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - Montrer que $|a + b| = |a| + |b|$ ssi a et b sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. (1 pt)
 - Dédurre que $|a - b| = |a - c| + |b - c|$ ssi $a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$. (1 pt)
- (5) Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$ dire si elle est majorée, minorée et bornée. Si oui, donner sa borne supérieure et ou sa borne inférieure.
 - $A = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x < \sqrt{3}\}$ (0.5 pt)
 - $B = \{x \in \mathbb{R}, x^3 > 3\}$ (0.5 pt)
 - $C = \{x \in \mathbb{R}, \exp(x) < \frac{1}{2}\}$ (0.5 pt)
 - $E = \{x \in \mathbb{R}, \text{il existe } p \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } x = \frac{\sqrt{2}}{p}\}$ (1 pt)

Elément Constitutif 2 (EC 2) : Suites numériques et fonctions (10 pts)

Partie A

- (1) Définir : u_n converge vers ℓ ; u_n est de Cauchy; u_n et v_n sont adjacentes (1 pt).
- (2) Montrer en utilisant la définition que $u_n = \frac{n^2+n}{n^6+n^3+n} \rightarrow 0$ (1pt).
- (3) On définit à présent les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n!n}$$

- (a) Montrer que $(u_n)_n$ est strictement croissante, et que $(v_n)_n$ est strictement décroissante (0.5 pts).
- (b) En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite e (0.5 pt).
- (c) Montrer que e n'est pas rationnel (2 pts).

Partie B

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner une preuve de chaque assertion vraie, et donner un contre-exemple de chaque assertion fausse. *réponse = 0.25 pt et justification = 0.75 pt.*

- (1) Toute suite convergente est bornée. (1 pt)
- (2) Toute suite convergente est de Cauchy. (1pt)
- (3) Toute suite admet une sous-suite convergente. (1pt)
- (4) Toute suite qui n'est pas croissante est décroissante. (1pt)
- (5) Si $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$ converge vers ℓ alors u_n tend vers ℓ . (1pt)

EXAMEN DE S1 : MATH 131

DURÉE = 02 H

EC1 1 : Topologie

Exercice 1

- (1) Soit A un ensemble donné et non vide. Définir : $\overset{\circ}{A}$ (ensemble des points intérieurs à A), $\bar{A}$ (ensemble des points adhérents de A), I_A (ensemble des points isolés de A) et A' (ensemble des points d'accumulation de A).
- (2) Recopiez et complétez le tableau suivant
- | | $A =]1; 1]$ | $B = \{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ | $C = \mathbb{Q} \cap]0; 1[$ |
|-----------------------|--------------|---|------------------------------|
| Points d'accumulation | ? | ? | ? |
| Points isolés | ? | ? | ? |
- (3) Nous voulons montrer qu'un ensemble compact est fermé en suivant les étapes suivantes
- Soit $x \in C_{\mathbb{R}}^K$. Montrer que : $\forall y \in K, \exists I_x(y)$ intervalle ouvert contenant x et $I_y(x)$ intervalle ouvert contenant y tels que $I_x(y) \cap I_y(x) = \emptyset$.
 - Montrer que $K \subset \bigcup_{y \in K} I_y(x)$ et déduire qu'il existe d'un intervalle ouvert contenant x et qui est entièrement contenu dans $C_{\mathbb{R}}^K$.
 - Déduire alors que K est fermé.

Exercice 2

- Enoncer le théorème de Bolzano Weierstrass pour les suites bornées.
- Montrer qu'un ensemble A est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A .
- Montrer que tout sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact. Il suffit pour cela de montrer toute suite d'éléments du sous-ensemble fermé admet une sous-suite qui converge dans ce sous ensemble. (on se servira des questions (1) et (2)).

EC2 : Fonctions

Exercice 1

- Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 5}} - x$.
- Montrer en utilisant la définition que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-1} = 5$
- Soit $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Déduire que l'équation $\cos(x) = x$ admet une solution comprise entre 0 et 1.

Exercice 2

- Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a .
- Montrer qu'il y a équivalence entre les propositions suivantes : (i) f est continue en $a \in \mathbb{R}$, (ii) pour toute suite (a_n) telle que $a_n \rightarrow a$, on a $f(a_n) \rightarrow f(a)$.
- Déduire de (2) que

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

EC1 1 : Topologie**Exercice 1**

- (1) Soit A un ensemble donné et non vide. Définir : A° (ensemble des points intérieurs à A), $\bar{A}$ (ensemble des points adhérents de A), I_A (ensemble des points isolés de A), A' (ensemble des points d'accumulation de A), $\text{Ex}(A)$ (ensemble des points extérieurs à A) et $\text{Fr}(A)$ (frontière de A).
- (2) Montrer que A' est fermé.
- (3) Soit $A = \{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que 1 est un point d'accumulation de A .
- (4) Pourquoi l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'a aucun point d'accumulation ?
- (5) Soit $A = [0, 1[\cup \{2\}$. Déterminer A° , A' , $\bar{A}$, $\text{Ext}(A)$ et $\text{Fr}(A)$.

Exercice 2

- (1) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels donnée. Définir ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (2) Définir $\limsup(x_n)$ et $\liminf(x_n)$ et quelle relation y'a t-il entre ces deux notions et la valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (3) Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_{2n} &= \frac{1}{n} \\ x_{2n+1} &= 1 - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Déterminer $\limsup(x_n)$ et $\liminf(x_n)$.

EC2 : Fonctions

Exercice 1 On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

- (1) Pour tout $n, 0 \leq v_n \leq 1$.
- (2) Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
- (3) Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.
- (4) Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2

- (1) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a .
- (2) Montrer qu'il y a équivalence entre les propositions suivantes : (i) f est continue en $a \in \mathbb{R}$, (ii) pour toute suite (a_n) telle que $a_n \rightarrow a$, on a $f(a_n) \rightarrow f(a)$.
- (3) Dédurre de (2) que

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

TRAVAUX DIRIGÉS DE L'UE MAT1031

Exercice 1. Définir et donner la négation de :

- a) La suite (u_n) est bornée ; b) La suite (u_n) est convergente ;
c) la suite (u_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; d) la suite (u_n) est de Cauchy.

Exercice 2. En utilisant la définition, montrer que :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 0$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0$; d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-1}{4n+5} = \frac{3}{4}$;
e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+\cos n} = 0$; f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5-1}{2n^5+n^3+n} = \frac{1}{2}$; g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n - 1 = +\infty$; h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n^2+1} = -\infty$

Exercice 3

- Montrer que si $u_n \rightarrow \ell$, et $\ell \neq 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell}$.
- Montrer que si $u_n \rightarrow \ell$, et $v_n \rightarrow \ell'$, alors $u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell'$.
- Montrer que si $u_n \rightarrow \ell$, et $v_n \rightarrow \ell'$, alors $u_n v_n \rightarrow \ell \ell'$.
- a) Montrer que si $u_n \rightarrow 0$, et (v_n) est bornée, alors $u_n v_n \rightarrow 0$.
b) **Application** : Donner la nature de (u_n) telle que $u_n = \frac{(-1)^n \cos(n^2+1)}{n+1}$.

5. On pose : $w_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

Montrer que (w_n) est croissante et bornée. Conclure.

6. Soit $u_n = \frac{n^2+n}{n^2+\sqrt{n}}$. Montrer en utilisant la définition de la convergence d'une suite que (u_n) est convergente.

Exercice 4.

- (u_n) est une suite numérique telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tend vers $\ell \in]-1, 1[$. Montrer que (u_n) tend vers 0.
- Montrer que si $\sqrt[n]{|u_n|} \rightarrow |\ell| \in [0, 1[$, alors (u_n) tend vers 0.
- Montrer que si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $v_n = \frac{u_1+u_2+\dots+u_n}{n}$ tend vers ℓ . Que dire de la réciproque ?

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer que la suite (u_n) telle que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est divergente.

Soit $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, une fonction décroissante et continue.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2; g(2) + \dots + g(n) \leq \int_1^n g(x) dx \leq g(1) + \dots + g(n-1)$.
- En appliquant le résultat 1) à $g(x) = \frac{1}{x}$, déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 6.

1. On pose $u_n = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}$.

a) Montrer que $\forall n \geq 4, \frac{2^n}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-4}}$

b) Etudier la monotonie de (u_n) .

c) Donner la nature de (u_n) .

2. On pose $v_n = \frac{1}{\sin(a) + \sin(a^2) + \dots + \sin(a^n)}$; $0 < a < 1$ et $w_n = \sin(a) + \sin(a^2) + \dots + \sin(a^n)$.

En étudiant la convergence de (w_n) , déduire la nature de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 7. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $k \in]0, 1[$. Soit donnée une suite (u_n) de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

2. En déduire que (u_n) est de Cauchy. Quelle est sa nature ?

3. On pose $u_n = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{6} |u_n - u_{n-1}|$.

b) Déduire de 1) et 2) que (u_n) est de Cauchy.

Soit $\ell = \lim u_n$. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

c) Montrer que (v_n) est une suite strictement croissante et à termes positifs.

d) Montrer que (w_n) et (v_n) sont adjacents. En déduire que $\ell \geq 0$.

e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n < \ell < v_n$.

f) Montrer que ℓ est un nombre irrationnel.

Exercice 8.

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

2. Montrer que les suites suivantes divergent en montrant qu'elles ne sont pas de Cauchy :

a) $u_n = \cos n$; b) $\sin n$.

3. Montrer que la suite (u_n) telle que $u_{n+1} = au_n$, avec $0 < a < 1$, u_0 donné, est de Cauchy.

En déduire sa nature. Utiliser une autre manière pour aboutir à ce même résultat.

Exercice 9. Etudier les suites récurrentes suivantes et déterminer leurs limites, lorsqu'elles existent :

a) $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$, u_0 donné;

b) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$;

c) $u_{n+1} = \sin^2 u_n$, u_0 donné;

d) $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$ (Discuter selon que $u_0 \in [0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}[$, $u_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $u_0 \in]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1[$ et on montrera que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites monotones.

Exercice 10. Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $0 < u_0 < v_0$. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$.

2. En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.