Chapitre 2

Matrices, systèmes d'équations linéaires

Une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n, tous deux munis de bases, est entièrement déterminée par np scalaires, qui sont les coordonnées dans F des images des éléments de la base de E. On peut disposer ces scalaires en un tableau à n lignes et p colonnes, appelé **matrice**. Tout se ramène alors à un calcul sur ces nouveaux objets. L'invention du calcul matriciel est l'oeuvre d'Arthur Cayley (1821-1895). Dans tout ce chapitre, n et p sont des entiers naturels et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Objectifs :
- Initiation au calcul matriciel
- Calcul du déterminant, de l'inverse et du rang d'une matrice
- Résolution des systèmes d'équations linéaires.

2.1 Matrices

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. *1. On appelle **matrice à** n **lignes et** p **colonnes** à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, ou encore **matrice de type** (n, p) ou $n \times p$, toute application*

$$\begin{aligned} \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, p\} &\xrightarrow{A} \mathbb{K} \\ (i, j) &\longmapsto a_{ij} \end{aligned}$$

que l'on peut disposer en tableau sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix},$$

ou encore

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p}.$$

Le premier indice i de a_{ij} désigne le numéro de la ligne et le second indice j le numéro de la colonne. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & i & 5 \\ 2 & 4 & -2i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$.

2. *Si $n = p$, on dit que A est une **matrice carée** et on note $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Par exemple* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. *Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne et on note* $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

4. *Si $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne et on note* $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \end{pmatrix}$.

5. *Une matrice carrée A est dite*
   – ***triangulaire supérieure*** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$. Elle est de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

   – ***triangulaire inférieure*** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$. Elle est de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

   – ***diagonale*** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$. Elle est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

   La matrice diagonale

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

   *est appelée **matrice identité (ou matrice unité) d'ordre** n.*

6. *La **transposée** de* $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ *est la matrice notée* ${}^tA$, *possedant p lignes et n colonnes et definie par*

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{ip} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.
$$

   Les lignes de ${}^tA$ *sont les colonnes de* A *et les colonnes de* ${}^tA$ *sont les lignes de* A. *Par exemple,*

$$
{}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^t({}^tA) = A.
$$

7. *Une matrice carrée est*
   - ***symétrique*** *si* ${}^tA = A$ *(les coefficients symétriques par rapport à la diagonale sont égaux),*
   - ***antisymétrique*** *si* ${}^tA = -A$, *où* $-A = (-a_{ij})$ *est la matrice obtenue en multipliant par* -1 *tous les coefficients de* A. *Les coefficients symétriques par rapport à la diagonale sont opposés et en particulier, les coefficients diagonaux sont nuls.*

   $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *est une matrice symétrique,* $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice antisymétrique.*

8. *La trace d'une matrice* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est la somme de ses coefficients diagonaux*

$$
Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.
$$

   La trace de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *est* $Tr(A) = 1 - 3 + 8 = 6$. *On vérifie que* $Tr(A) = Tr({}^tA)$.

2.2 Opérations sur les matrices

2.2.1 Addition des matrices

Soient $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. La somme des matrices A et B est définie par

$$
A + B = (c_{ij}) \text{ avec } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.
$$

Exemple 2.2.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.
$$

On peut vérifier que pour tout $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, et pour la matrice nulle $O = (0)_{ij}$ (matrice dont tous les coefficients sont nuls) de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on a

– $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativité)
– $A+B = B+A$ (commutativité)
– $A+O = O+A = O$ (élément neutre)
– A+(-A)=(-A)+A=O (inverse).
On conclut que $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien. On a aussi ${}^t(A+B) ={}^t A+{}^t B$, $Tr(A+B) = Tr(A)+Tr(B)$.

Exercice 2.3. *Montrer que la matrice $A+{}^t A$ est symétrique et la matrice $A-{}^t A$ est antisymétrique.*

2.2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Pour tout $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, le produit de la matrice A par le scalaire α est la matrice $\alpha A = (\alpha a_{ij})$. Par exemple pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$4A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -12 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ -A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ 0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre que : ${}^t(\alpha A) = \alpha \times {}^tA$, $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$.

Exercice 2.4. *Trouver deux matrices A et B telles que $2A-3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A-2B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.*

2.2.3 Produit de deux matrices

Soient $n,p,q \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B = (b_{jk})\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ (le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B). Le produit des matrices A et B est la matrice $C = AB = (c_{ik})\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ ayant le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B et définie par

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ip}b_{pk}.$$

Pour obtenir l'élément c_{ij} de AB, on multiplie la $i$ème ligne $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix}$ de A par la $k$ème colonne $\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix}$ de B, c'est-à-dire

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix}.$$

Exemples 2.5.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -4 \\ 12 & -9 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *n'a pas de sens car la matrice de gauche a 3 colonnes et la matrice de droite 2 lignes ($3 \neq 2$).*

3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$, on a :
- $(AB)C = A(BC)$ (associativité).
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. (Attention à l'ordre !)

Mais attention, on n'a pas toujours $AB = BA$. Par exemple

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

alors que

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Lorsqu'il existe n tel que $A^n = O$, on dit que la matrice carrée A est **nilpotente**. Par exemple

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \text{ donc } \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \text{ est une matrice nilpotente.}$$

Pour toute matrice carrée A d'ordre n, on a $AI_n = I_nA = A$. On dit que la matrice identité d'ordre n est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2.6. *Soient* $D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ *une matrice diagonale. Calculer* D^2, D^3 *et en déduire* D^n, $n \in \mathbb{N}$. *Prouver ce résultat par recurrence sur* n.

2.3 Déterminant d'une matrice carrée

2.3.1 Calcul du déterminant d'une matrice carrée

Si $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2, alors $\det(A) = \begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix} = ad - bc$.

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée $A = \begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$ d'ordre 3, on peut :

1. Utiliser la **règle de Sarrus** (qui n'est vraie que pour les matrices carrées d'ordre 3) : On prend la première et la deuxième colonne de A pour former la quatrième et cinquième colonne

$$\begin{pmatrix}a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1\\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2\\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1\\ & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2\\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3\end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1.$$

2. Développer suivant une ligne ou une colonne de A. Par exemple, en développant suivant la première ligne, on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Si on developpe par rapport à une ligne i, en posant M_{ij} le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la $i$ème ligne et le $j$ème colonne de A, $j = 1, 2, 3$, on obtient

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + (-1)^{i+3}a_{i3}M_{i3}.$$

Si on developpe par rapport à une colonne j, en posant M_{ij} le déterminant de la matrice obtenu en éliminant la $i$ème ligne et le $j$ème colonne de A, $i = 1, 2, 3$, on obtient

$$\det(A) = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + (-1)^{3+j}a_{3j}M_{3j}.$$

Dans cette opération, la colonne ou la ligne ayant le plus de zéro est choisie en priorité.

Exemples 2.7. *Calculons le déterminant de* $A = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 9 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Avec la règle de Sarrus, on a la matrice $\begin{pmatrix} -7 & -4 & 6 & -7 & -4 \\ 8 & 2 & 3 & 8 & 2 \\ 9 & -6 & 9 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ *et on en déduit*

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-7)\times 2\times 9 + (-4)\times 3\times 9 + 6\times 8\times(-6) - 9\times 2\times 6 - (-6)\times 3\times(-7) - 9\times 8\times(-4) \\ &= -126 - 108 - 288 - 108 - 126 + 288 \\ &= -468. \end{aligned}$$

Nous allons développer le determinant de la matrice B par rapport à la deuxième ligne qui contient un zero, on a

$$\det(B) = (-1)^{2+1}\times 0\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\times 1\times\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\times(-2)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2-20+2(6-10) = -26.$$

De facon générale, soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. Soit M_{ij} le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de A. Si nous developpons le déterminant de A
– par rapport à une colonne j, alors $\det(A) = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}$,
– par rapport à une ligne i, alors $\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$.
Ces deux formules aboutissent bien sûr au même résultat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(12-0) - 3(4+4) + 0(0+6) = -12.$$

2.3.2 Quelques propriétés du déterminant

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

2. $\det(A) = \det({}^tA)$. Par exemple pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14 \text{ et } \det({}^tA) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14.$$

3. Si nous permuttons deux lignes ou deux colonnes d'une matrice carrée A, nous obtenons une nouvelle matrice dont le déterminant est $-\det(A)$. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, la matrice obtenue en permuttant les deux lignes de A a pour déterminant $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14 = -\det(A)$ et la matrice obtenue en permuttant les deux colonnes de A a pour déterminant $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14 = -\det(A)$.

4. Si une matrice carrée A comporte une ligne ou une colonne de 0 alors $\det(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Si une matrice carrée A comporte deux lignes ou deux colonnes proportionnelles (ou identiques) alors $\det(A) = 0$. Par exemple $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -5 & 15 & 15 \\ 2 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 0$ car la troisième colonne est égale à la première colonne fois 3 et $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -5 & 15 & 7 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$ car la première ligne et la troisième ligne sont identiques.

6. Si A est une matrice triangulaire inférieure ou supérieure, alors $\det(A)$ égal au produit des éléments de sa diagonale. $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-5) \times 4 \times (-1) = 20$ car la matrice est triangulaire supérieure.

7. Si B est une matrice obtenue à partir de la matrice carrée A en multipliant une ligne ou une colonne par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(B) = \lambda \det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -25 & 3 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

   On a $\det(A) = -1$. La matrice B est obtenue en multipliant la première ligne de A par 2 et nous avons $\det(B) = -2 = 2\det(A)$. La matrice C est obtenue en multipliant la première colonne de A par 5 et $\det(C) = -5 = 5\det(A)$.

8. Si on ajoute à une ligne (ou une colonne) d'une matrice carrée A une combinaison linéaire des autres lignes (des autres colonnes), nous obtenons une nouvelle matrice de même déterminant que A.

On veut calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$, où L_i désigne la ligne i. Par la méthode du pivot de Gauss (à voir plus tard), on obtient par élimination une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2 \end{matrix}$$

Puisque le déterminant de A ne change pas en ajoutant à une ligne de A une combinaison linéaire des autres lignes, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{vmatrix} = 1 \times (-3) \times \frac{5}{3} = -5.$$

$L_i \leftarrow L_i + aL_j$ veut dire qu'on multiplie la ligne j par a et on ajoute à la ligne i.

9. Si A, B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exercice 2.8. *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 73 & 7 & 3 \\ 10 & 1 & 0 \\ 51 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

2.4 Inverse d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\det(A) \neq 0$, alors la matrice A est **innversible**, c'est-à-dire il existe une unique matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Puisque $AA^{-1} = I_n$, alors on a $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$, donc $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

2.4.1 Inverse d'une matrice carrée inversible d'ordre 2

Soit $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Si $\det(A) = ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et on a $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 2.9. $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$ *donc A est inversible et* $A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.10. *Montrer que la matrice* $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ *est inversible, puis calculer son inverse.*

2.4.2 Inverse d'une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$: Méthode du pivot de Gauss

On veut calculer l'inverse d'une matrice carrée, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot de Gauss. Pour cela on augmente à la matrice A la matrice identité d'ordre $n = 3$ ´

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}.$$

Puis on effectue simultanement sur les lignes de A et celles de I_n les mêmes opérations élémentaires pour transformer A en I_n et I_n en A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & | & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -15 & 0 & | & -12 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & | & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 5L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 - 2L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & | & -6 & 12 & -3 \\ 0 & -15 & 0 & | & -12 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & | & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -6/15 & 12/15 & -3/15 \\ 0 & 1 & 0 & | & 12/15 & -9/15 & 6/15 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/15 \\ L_2 \leftarrow -L_2/15 \\ L_3 \leftarrow L_3/5 \end{matrix}.$$

On déduit que $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.5 Systèmes d'équations linéaires

C'est un système de n équations à p inconnues dans le corps $\mathbb{K}$ défini par

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = y_n \end{array}\right.$$

que l'on peut représenter matriciellement par $AX = Y$ où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X =^t (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $Y =^t (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Résoudre ce système d'équations revient à déterminer $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Ce système peut avoir :

- une unique solution
- une infinité de solutions
- aucune solution.

Si A est une matrice carrée inversible, la solution de ce système est donnée par $X = A^{-1}Y$.

2.5.1 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre par exemple le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 1 \\ -x + y + 7z + 2t = 1 \\ 2x + y - 8z + t = a \end{array}\right.$$

Ce système peut encore s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre ce système, on part de la matrice augmentée

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -8 & 1 & a \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

et on procède par élimination pour obtenir une matrice triangulaire supérieure à gauche.

$$\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & -8 & 1 & | & a \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & | & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & | & a-2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & | & a-2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 9a-4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow 9L_4 + 7L_3 \end{array} \end{array}.$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} x + 2y - z + t & = 1 \\ y + 2z - 2t & = 0 \\ 9t & = 2 \\ 0 & = 9a - 4 \end{cases}$$

Si $9a - 4 \neq 0$ c'est-à-dire $a \neq \frac{4}{9}$, alors ce système n'admet pas de solution.
Si $9a - 4 = 0$ c'est-à-dire $a = \frac{4}{9}$, alors ce système admet une infinité de solutions.
$L_3 : 9t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{9}$ et par suite L_1 et L_2 deviennent $\begin{cases} x + 2y - z = \frac{7}{9} \\ y + 2z = \frac{4}{9} \end{cases}$. On a deux équations et trois inconnues, on fixe donc une inconnue comme paramètre. En fixant $z \in \mathbb{R}$ comme paramètre, on obtient

$$y = \frac{4}{9} - 2z,\ x = -\frac{1}{9} + 5z.$$

L'ensemble solution du système est donc

$$S = \{(-\frac{1}{9} + 5z, \frac{4}{9} - 2z, z, \frac{2}{9}),\ z \in \mathbb{R}\}.$$

On veut aussi résoudre le système $\begin{cases} 4x + 6y + 9z = 6 \\ 6x - 2z = 20 \\ 5x - 8y + z = 10 \end{cases}$.

$$\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & | & 6 \\ 6 & 0 & -2 & | & 20 \\ 5 & -8 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & | & 6 \\ 0 & -36 & -62 & | & 44 \\ 0 & -62 & -41 & | & 10 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - 6L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - 5L_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & | & 6 \\ 0 & -36 & -62 & | & 44 \\ 0 & 0 & -2368 & | & 2368 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow -36L_3 + 62L_2 \end{array} \end{array}.$$

On obtient alors le système $\begin{cases} 4x+6y+9z & =6 \\ -36y-62z & =44 \\ -2368z & =2368 \end{cases}$. La dernière équation donne $z=-1$. En remplacant $z=-1$ dans la deuxième équation, on obtient $y=\frac{1}{2}$. En remplacant $y=\frac{1}{2}$ et $z=-1$ dans la première équation, on a $x=3$. Ainsi la solution de notre système d'équations est $S=\{(3,\frac{1}{2},-1)\}$.

2.5.2 Autre méthode pour calculer l'inverse d'une matrice

Pour calculer l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on peut résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x+2y-z=x' \\ 2x+y=y' \\ x+2z=z' \end{cases}$$

pour trouver x,y,z en fonction de x',y',z' et en extraire A^{-1}. Résolvons donc le système à l'aide du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ll}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & x' \\ 2 & 1 & 0 & | & y' \\ 1 & 0 & 2 & | & z' \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & x' \\ 0 & -3 & 2 & | & y'-2x' \\ 0 & -2 & 3 & | & z'-x' \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & x' \\ 0 & -3 & 2 & | & y'-2x' \\ 0 & 0 & 5 & | & x'-2y'+3z' \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3-2L_2 \end{array}
\end{array}.$$

On déduit de la dernière ligne que $5z=x'-2y'+3z'$ donc $z=\frac{1}{5}(x'-2y'+3z')$. La deuxième ligne équivaut à $-3y+2z=y'-2x'$, soit $-3y=\frac{1}{5}(-12x'+9y'-6z')$. D'où $y=\frac{1}{5}(4x'-3y'+2z')$. La première ligne donne $x=x'-2y+z=\frac{1}{5}(-2x'+4y'-z')$. En résumé,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{5}(-2x'+4y'-z') \\ y &= \frac{1}{5}(4x'-3y'+2z') \\ z &= \frac{1}{5}(x'-2y'+3z') \end{aligned}$$

On en déduit que $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.11. *Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :*
$\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 10x+25z=90 \\ 20x+10y=80 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x+2y+z=3 \\ 2x+y+z=0 \\ 6x+2y+4z=6 \end{cases}$.

Exercice 2.12. *Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs du paramètre complexe a :*

$$\begin{cases} x - ay + a^2z = a \\ ax - a^2y + az = 1 \\ ax + y - a^3z = 1 \end{cases}$$

2.6 Rang d'une matrice

Définition 2.13. *Le* ***rang*** *d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le nombre maximum de lignes (ou de colonnes) de A qui sont linéairement indépendants.*

Par exemple, on considère la matrice $A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$. Nous avons

$$6L_1 - \frac{1}{2}L_2 - L_3 = 6\begin{pmatrix}3 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6 & 42 & 24 & 54\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}21 & -21 & 0 & -15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On conclut que les trois lignes de la matrice A ne sont pas linéairement indépendants. On en déduit que le rang de la matrice vaut 2 car les deux premières lignes de A sont indépendantes (on ne peut pas trouver α tel que $L_2 = \alpha L_1$).

Méthode :

1. Pour déterminer le rang d'une matrice, on peut effectuer les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes pour avoir une matrice equivalente de forme triangulaire. Le nombre de lignes ou de colonnes ayant les pivots $a_{ii} \neq 0$ est égal au rang de la matrice.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n et $\det A \neq 0$, alors le rang de A est n.

Il est à noter que :
– si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors le rang de A est inférieur ou égal au $\min(n,p)$.
– si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang de A égal $r \geq 1$ si et seulement si A contient une sous matrice carrée d'ordre r ayant un déterminant non nul.

Exemple 2.14. 1. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Donc si $a^2 \neq b^2$, $\det(A) \neq 0$ et par suite le rang de A vaut 2. Mais si $a = \pm b$, $\det(A) = 0$ et le rang de A vaut 1.*

2. *On veut déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$. On la transforme d'abord pour avoir*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{array}.$$

Cette matrice ayant deux lignes avec les pivots non nuls, on conclut que le rang de A vaut 2.

3. Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ *est* 3 *car cette matrice a 3 lignes avec les pivots non nuls.*

Exercice 2.15. *Calculer le rang des matrices suivantes :*
$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -8 & -6 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 10 \\ -6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 8 & 48 \end{pmatrix}$.

2.7 Travaux dirigés

1. On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) Quels sont les produits matriciels possibles ? Pour chacun des cas, calculer le produit.
   (b) Quelles sont les matrices carrées ?
   (c) Quelles sont les matrices symétriques ?
2. Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha I_3 + \beta A$.
   (b) En déduire que A est inversible et donner son inverse.
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 2I_4$.

(a) Calculer B, B^2, B^3, B^4. Que pouvez-vous déduire pour $B^k, k \geq 4$?

(b) De l'égalité $A = B + 2I_4$ et de la formule du binôme de Newton, déduire la valeur de A^n pour tout entier naturel n.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Montrer par recurrence sur n que $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$.

7. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} 4x - 6y = -11 \\ -3x + 8y = 10 \end{cases}, \begin{cases} x + y - z = 9 \\ 8y + 6z = -6 \\ -2x + 4y - 6z = 40 \end{cases}, \begin{cases} 4x + y = 4 \\ 5x - 3y + z = 2 \\ -9x + 2y - z = 5 \end{cases}, \begin{cases} 13x + 12y = -6 \\ -4x + 7y = -73 \\ 11x - 13y = 157 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 4x - 8y + 3z = 16 \\ -x + 2y - 5z = -21 \\ 3x - 6y + z = 7 \end{cases}, \begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 4x + 6z = 0 \end{cases}, \begin{cases} 4y + 3z = 8 \\ 2x - z = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}, \begin{cases} -2y - 2z = -8 \\ 3x + 4y - 5z = 13 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 5x - 7y + 3z = 17 \\ -15x + 21y - 9z = 50 \end{cases}, \begin{cases} 5y + 5z - 10t = 0 \\ 2x - 3y - 3z + 6t = 2 \\ 4x + y + z - 2t = 4 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 0 \\ -3x + 3y - 6z + 5t = 15 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 10x + 4y - 2z = -4 \\ -3w - 17x + y + 2z = 2 \\ w + x + y = 6 \\ 8w - 34x + 16y - 10z = 4 \end{cases}, \begin{cases} 2x + 3y + z - 11t = 1 \\ 5x - 2y + 5z - 4t = 5 \\ x - y + 3z - 3t = 3 \\ 3x + 4y - 7z + 2t = -7 \end{cases}.$$

8. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 16 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 16 & 2 \\ 2 & 16 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

10. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ d)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 puis en déduire $(I_3+A)^n$ pour $n \geq 3$.

12. Inverser, lorsque c'est possible, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}.$$

13. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

    Déterminer, lorsque cela est possible, l'inverse de la matrice A.

14. On considère la matrice carrée d'ordre 3 suivante $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

    (a) Calculer le déterminant de A. Quel est le rang de cette matrice ? La matrice A est-elle inversible ?

    (b) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer l'inverse A^{-1} de A.

    (c) On considère le système suivant (S) : $\begin{cases} -2x - 3z = 5 \\ x + y + z = -3 \\ -x - z = 1. \end{cases}$ Écrire le système (S) sous la forme $A_1 X = B$, où $X = (x, y, z)^t$ et A_1, B sont deux matrices à déterminer.

    (d) En utilisant l'inverse de A calculé ci-dessus, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S).