Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques

Deuxième Année LMD

Semestre 3

CHOUGUI NADHIR

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences

Université Ferhat Abbas, Sétif 1

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La topologie intervient dans de nombreuses branches des mathématiques où elle est intimement liée à la théorie des ensembles, à l'étude de convergence des suites et séries, à l'analyse fonctionnelle, à l'analyse complexe, au calcul intégral et différentiel, au calcul vectoriel et à la géométrie. Donc, la topologie est un outil très important pour les étudiants qui souhaitent poursuivre ses études en mathématiques.

Le but de ce cours est ainsi de servir à ce vaste sujet et donner les bases en topologie indispensables à toute formation en mathèmatiques. Les prérequis pour ce cours sont une bonne connaissance de :

1) Techniques ensemblistes.
2) Analyse élémentaire sur la droite réelle $\mathbb{R}$.
3) Algèbre linéaire et bilinéaire.
4) Fonctions d'une et de plusieurs variables réelles .

Ce polycopie s'adresse aux étudiants en deuxième année LMD mathématiques, semestre 1, à l'universté Ferhat Abbes - Sétif1- Algérie, avec deux cours et deux TD par semaine. Il est composé de 6 chapitre.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de la structure des espaces topologiques et leurs propriété, les suites convergentes, les applications continues, les applications ouvertes et fermées et les homéomorphismes.

Dans le deuxième chapitre on a étudié et d'une manière similaire à celle qu'on a vu dans le premier chapitre les espaces métriques et leurs propriété où on a introduit d'autres notions comme : la distance, la boule ouverte et la boule fermé, les espaces isométriques et les applications lipschitzienne.

Dans le troisième chapitre on a donné la notion d'un espace complet qui est basée sur les suites de Cauchy et la notion d'un point fixe.

Dans le quatrième chapitre on s'intéresse à l'étude de la compacité dans les espaces topologique et les espaces métriques.

Dans le cinquième chapitre est dédié à l'étude de la connexité dans les espaces topologiques et métriques.

Enfin, pour aider l'étudiant à une bonne compréhension des notions introduites dans ce travail on a introduit le dernier chapitre comme annexe qui contient un rappel sur la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

CONSEIL

Ce polycopié ne dispense pas d'assister aux amphis ni de prendre des notes complémentaires. Il est là pour éviter un travail de copie qui empêche parfois de se concentrer sur les explications données oralement.

CHAPITRE 1

ESPACES TOPOLOGIQUES

1.1 Topologie, Ouverts, Fermés

Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque. On note $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{X}$.

Définition 1.1. *Une topologie sur $\mathbb{X}$ est une famille $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ de parties de $\mathbb{X}$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

A_1) $\emptyset$ et $\mathbb{X}$ sont des éléments de $\mathcal{T}$,

A_2) toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$, c-à-d : pour toute famille $\{O_i : \ i \in I\}$ de parties de $\mathcal{T}$, on a $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

A_3) toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$, c-à-d : pour toute famille $\{O_i : \ i \in I \text{ et } I \text{ est fini }\}$ de parties de $\mathcal{T}$, on a $\bigcap\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Le couple $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est appelé espace topologique et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de la topologie.

Exemple 1.1. *Soit $\mathbb{X} = \{1, 2\}$. Les topologies définies sur $\mathbb{X}$ sont :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= \{\phi, \mathbb{X}\}. \\
\mathcal{T}_2 &= \{\phi, \mathbb{X}, \{1\}\}. \\
\mathcal{T}_3 &= \{\phi, \mathbb{X}, \{2\}\}. \\
\mathcal{T}_4 &= \{\phi, \mathbb{X}, \{1\}, \{2\}\}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.2. *Soit $\mathbb{X}$ un ensemble non vide, alors $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ (resp. $\{\mathbb{X}, \phi\}$) défini sur $\mathbb{X}$ une topologie, appelée topologie discrète et notée $\mathcal{T}_{Disc}$ (resp. topologie grossière ou triviale et notée $\mathcal{T}_{Gros}$).*

Remarque 1.1. *Tout ensemble admet donc au moins deux topologies.*

Exemple 1.3. *Soient $\mathbb{X}$ un ensemble infini et*

$$\mathcal{T}_{Cof} = \{O \subseteq \mathbb{X} : \complement_{\mathbb{X}} O \text{ est fini }\} \cup \{\emptyset\}.$$

Alors $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Cof})$ est un espace topologique et $\mathcal{T}_{Cof}$ est appelée la topologie cofinie sur $\mathbb{X}$.

Définition 1.2. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et F une partie de X. On dit que la partie F est fermée si et seulement si le complément $\complement_{\mathbb{X}} F \in \mathcal{T}$. On note par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de $\mathbb{X}$.*

Exemples 1.1.

1. *Dans l'exemple (1.1), si on prend la topologie $\mathcal{T}_2$ alors l'ensemble $\{2\}$ est fermé.*
2. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Cof})$. Alors toute partie finie de X est fermée (par définition).*
3. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Disc})$. Alors toute partie de $\mathbb{X}$ est à la fois ouverte et fermée car dans cette topologie les singletons sont des ouverts.*
4. *Soit $X = (\mathbb{R}, |.|)$. Alors $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés (voir page (67)).*

Remarque 1.2. *Une partie d'un espace topologique peut-être à la fois ouverte et fermée (par exemple dans l'espace discret). De même une partie d'un espace topologique peut-être ni ouverte ni fermée (par exemple $[2,5[$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$)*

Proposition 1.1. *L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés de $\mathbb{X}$ vérifie les propriétés suivantes :*

P_1) $\mathbb{X}$ et ϕ sont des fermés,

P_2) toute réunion finie de fermés est un fermé,

P_3) toute intersection de fermés est un fermé.

Preuve. *Ces propriétés des parties fermées découlent directement des propriétés vérifiées par les parties ouvertes d'une topologie. En effet :*

- *On a vu que $\mathbb{X}$ et $\emptyset$ sont des ouverts et puisque $\complement_{\mathbb{X}} \emptyset = \mathbb{X}$ et $\complement_{\mathbb{X}} \mathbb{X} = \emptyset$ on conclut que $\mathbb{X}$ et $\emptyset$ sont des fermés. Donc, P_1 est vérifiée.*
- *Si $\{F_i : i = 1, ..., N\}$ une famille finie de parties fermées de $\mathbb{X}$. Alors, pour tout $i = 1, ..., N$ on a $\complement_{\mathbb{X}} F_i$ est ouvert, donc $\complement_{\mathbb{X}}(\bigcup_{i=1}^{N} F_i) = \bigcap_{i=1}^{N} \complement_{\mathbb{X}} F_i$ est un ouvert (voir A_3 page (1)) d'où $\bigcup_{i=1}^{N} F_i$ est un fermé. Donc, P_2 est vérifiée.*
- *Si $\{F_i : i \in I\}$ une famille quelconque de parties fermées de $\mathbb{X}$. Alors, on a $\complement_{\mathbb{X}}(\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} \complement_{\mathbb{X}} F_i$ est un ouvert (voir A_2 page (1)) d'où $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé. Donc, P_3 est vérifiée.*

Remarque 1.3. *Soit $\mathcal{T} = \{O \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) \ / \ \complement_{\mathbb{X}} O \in \mathcal{F}\}$. Alors, on peut montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$ (Exercice). Donc, une topologie peut aussi bien être définie par la donnée de l'ensemble de ses ouverts que par la donnée de l'ensemble de ses fermés.*

1.2 Voisinages

Définition 1.3. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une partie V_x de $\mathbb{X}$ est un voisinage de x dans $\mathbb{X}$ s'il existe un ouvert O_x de $\mathbb{X}$ vérifiant $x \in O_x \subseteq V_x$. On note par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*

On peut écrire la définition précédente sous la forme suivante :

$$(V_x \text{ est un voisinage de x}) \Leftrightarrow (\exists\ O_x \in \mathcal{T}\ /\ x \in O_x \subseteq V_x). \tag{1.1}$$

Définition 1.4. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une partie V de $\mathbb{X}$ est un voisinage d'une partie non vide A de $\mathbb{X}$ s'il existe un ouvert O de $\mathcal{T}$ vérifiant $A \subseteq O \subseteq V$. Autrement dit :*

$$(V \textit{ est un voisinage de } A) \Leftrightarrow (\exists\ O \in \mathcal{T}\ /\ A \subseteq O \subseteq V). \tag{1.2}$$

Exemple 1.4.
1. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T}_{Gros})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{X}$ on a $\mathcal{V}(x) = \{\mathbb{X}\}$.*
2. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T}_{Disc})$ et $x \in \mathbb{X}$. Alors, toute partie de $\mathbb{X}$ qui contient x est un élément de $\mathcal{V}(x)$.*
3. *Soient $(\mathbb{X},\mathcal{T}) = (\mathbb{R},|.|)$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, toute partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle centré en x est un voisinage de x (voir (A.5)).*
4. *Soient $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset,\mathbb{X},\{1\},\{4\},\{1,4\}\}$ alors on a :*
   - $\mathcal{V}\{1\} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\mathbb{X}\}$
   - $\mathcal{V}\{2\} = \{\mathbb{X}\}$
   - $\mathcal{V}\{1,4\} = \{\{1,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\mathbb{X}\}$

Il découle de la définition précédente que si $B \subset A$, alors tout voisinage de A est un voisinage de B.

Proposition 1.2. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de $\mathbb{X}$. Alors, on a*

$$(V \textit{ est un voisinage de } A) \Longleftrightarrow (\forall x \in A : V \in \mathcal{V}(x)). \tag{1.3}$$

Preuve. $\Longrightarrow)$ *Évidente.*

$\Longleftarrow)$ *Supposons que V est un voisinage de tout point de A. Alors on a*

$$\forall x \in A,\ \exists\ O_x \in \mathcal{T}\ /\ x \in O_x \subseteq V,$$

d'où on conclut que $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} O_x \subseteq V$ et puisque $\bigcup\limits_{x\in A} O_x \in \mathcal{T}$ alors V est un voisinage de A.

Proposition 1.3. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique. Une partie non vide A est un ouvert de $\mathbb{X}$ si et seulement si A est un voisinage de chacun de ses points.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que A est un ouvert de $\mathbb{X}$, alors en utilisant la définition (1.3) on conclut que A est un voisinage de chacun de ses points.*

$\Longleftarrow$) *Supposons que A est un voisinage de chacun de ses points, alors pour tout $x \in A$, il existe $O_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O_x \subset A$ d'où $A = \bigcup_{x\in A} O_x$. Alors, A est ouvert comme réunion d'ouverts.*

Proposition 1.4. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les voisinages d'un point vérifient les propriétés suivantes.*

1. *Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ on a $x \in V$.*
2. *Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ et tout $\mathbf{U} \subset \mathbb{X}$, si $V \subset \mathbf{U}$ alors $\mathbf{U} \in \mathcal{V}(x)$.*
3. *Toute intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.*
4. *Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que : pour tout $a \in W$ on a $V \in \mathcal{V}(a)$*

Preuve. • *Les deux propriétés 1 et 2 sont évidentes.*

• *Pour la troisième propriété, si $\{V_i : i = 1,...,n\}_{1\leq i\leq n}$ une famille de voisinages de $x \in \mathbb{X}$. Alors, pour tout $i = 1,...,n$ il existe $O_i \in \mathcal{T}$ tels que $x \in O_i \subset V_i$ d'où on conclut que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. On en déduit que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{V}(x)$ car $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$.*

• *Pour la quatrième propriété, si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subset V$ d'où V est un voisinage de O donc un voisinage de tout point $x \in O$. En fin, pour $W = O$ la propriété (4) est vérifiée.*

1.3 Comparaison de topologies

Définition 1.5. *Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble $\mathbb{X}$. On dit que $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$ (ou bien $\mathcal{T}_2$ est moins fine que $\mathcal{T}_1$) si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Autrement dit : $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$ si l'une des trois assertions suivantes est vérifiées.*

1. *Tout ouvert de $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_2)$ est aussi un ouvert de $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_1)$.*
2. *Tout fermé de $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_2)$ est aussi un fermé de $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_1)$.*
3. *Si $x \in \mathbb{X}$, alors tout voisinage de x dans $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_2)$ est un voisinage de x dans $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_1)$.*

Remarque 1.4. *Si $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$ on dit que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont équivalentes.*

Exemple 1.5. *La topologie grossière $\mathcal{T}_{Gros}$ est la topologie la moins fine des topologies sur $\mathbb{X}$, et la topologie discrète $\mathcal{T}_{Disc}$ est la topologie la plus fine des topologies sur $\mathbb{X}$.*

Deux topologies ne sont pas nécessairement comparables.

Exemple 1.6. *Si $\mathbb{X} = \{x,y,z\}$, alors $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{x\}, \mathbb{X}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{x,y\}, \mathbb{X}\}$, $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{x\}, \{x,y\}, \mathbb{X}\}$ sont trois topologies distinctes sur $\mathbb{X}$. Les topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont moins fine que $\mathcal{T}_3$, cependant $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ ne sont pas comparables.*

Proposition 1.5. *Soit* $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ *un ensemble de topologies sur* $\mathbb{X}$. *Alors, l'intersection* $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ *est une topologie sur* $\mathbb{X}$ *qui est la moins fine de chaque une des topologies* $\mathcal{T}_i$.

Preuve. *Évidente.*

Proposition 1.6. *Soit* β *une famille de parties de* $\mathbb{X}$. *Il existe une plus petite topologie qui contienne* β. *Cette topologie s'appelle la topologie engendrée par* β.

Preuve. *L'ensemble des topologies qui contiennent* β *n'est pas vide car il contient la topologie discrète. Donc, il suffit de prendre l'intersection de ces topologies.*

1.4 Systèmes fondamentaux de voisinages et base d'une topologie

Définition 1.6. *Une partie* $\mathcal{S}(x)$ *de* $\mathcal{V}(x)$ *est appelée système fondamental de voisinage (noté SFV) de* x *si et seulement si pour tout* $V \in \mathcal{V}(x)$, *il existe* $W \in \mathcal{S}(x)$ *tel que* $W \subseteq V$.

Exemple 1.7.

1. *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Alors, on a :*

$$\mathcal{S}(x) = \{O \in \mathcal{T} : x \in O\},$$

est un SFV *de* x.

2. *Dans un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Disc})$ *on a*

$$\mathcal{S}(x) = \{\{x\}\},$$

est un SFV *de* x.

3. *Soit l'espace topologique* $(\mathbb{R}, |.|)$ *et* $x \in \mathbb{R}$. *Alors, on a :*

$$\mathcal{S}(x) = \{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ : \varepsilon > 0\},$$

est un SFV *de* x. *Par exemple* $\mathcal{S}(x) = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\ : n \in \mathbb{N}^*\}$ *est un* SFV *dénombrable de* x.

4. *Soit* $\bar{\mathbb{R}}$ *muni de la topologie usuelle, alors :*

$$\mathcal{S}(x) = \{]x, +\infty]\ : x \in \mathbb{R}\},$$

est un SFV *de* $+\infty$. *Par exemple* $\mathcal{S}(x) = \{]n, +\infty] : n \in \mathbb{N}\}$ *est un* SFV *dénombrable de* $+\infty$.

Définition 1.7. *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique, une base pour la topologie* $\mathcal{T}$ *est une famille* $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ *telle que tout élément de* $\mathcal{T}$ *est une réunion d'éléments de* $\mathfrak{B}$.

Exemple 1.8. *1. Soit l'espace topologique* $(\mathbb{R}, |.|)$ *et* $x \in \mathbb{R}$*. Alors, on a :*

$$\mathfrak{B} = \{]x, y[\ : x, y \in \mathbb{R}\},$$

est une base de la topologie usuelle.

2. *Dans un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Disc})$ *on a*

$$\mathfrak{B} = \{\{x\},\ x \in \mathbb{X}\},$$

est une base de la topologie discrète.

3. *Soient* $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$ *et* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$*. Alors, on a*

$$\mathfrak{B} = \{\{x\}, \{y\}, \mathbb{X}\},$$

est une base pour cette topologie.

4. *Si* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *est un espace topologique, alors* $\mathcal{T}$ *est une base pour elle même.*
5. *Dans un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Gros})$ *on a*

$$\mathfrak{B} = \{\mathbb{X}\},$$

est une base de la topologie grossière.

Remarque 1.5. *Si* $\mathfrak{B}$ *est une base d'un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *et* $\mathfrak{B}'$ *est une famille qui contient* $\mathfrak{B}$*, alors en utilisant la définition précédente on conclut que* $\mathfrak{B}'$ *est une autre base de* $\mathcal{T}$*. Donc, un espace topologique peut avoir plusieurs bases.*

Proposition 1.7. *Toute base* $\mathfrak{B}$ *d'une topologie* $\mathcal{T}$ *sur* $\mathbb{X}$ *possède les deux propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{X}$*, il existe* $B \in \mathfrak{B}$ *tel que* $x \in B$*.*
2. *Si* $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ *et* $x \in B_1 \cap B_2$*, alors il existe* $B_3 \in \mathfrak{B}$ *tel que* $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$*.*

Preuve. *Supposons que* $\mathfrak{B}$ *est une base de la topologie* $\mathcal{T}$*.*

1. *Puisque* $\mathbb{X}$ *est un ouvert, alors* $\mathbb{X} = \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}} B$ *(voir définition (1.7)) d'où pour tout* $x \in \mathbb{X}$*, il existe* $B \in \mathfrak{B}$ *tel que* $x \in B$*.*
2. *Si* $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$*, alors* $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ *(car* $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$*) d'où* $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$*. Donc,* $B_1 \cap B_2 = \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}} B$ *(voir définition (1.7)). Alors, pour tout* $x \in B_1 \cap B_2$*, il existe* $B_3 \in \mathfrak{B}$ *tel que* $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$*.*

Proposition 1.8. *Si* $\mathfrak{B}$ *est une famille de parties d'un ensemble quelconque* $\mathbb{X}$ *qui satisfait les deux propriétés de la proposition (1.7), alors* $\mathcal{T} = \{\bigcup B : B \in \mathfrak{B}\}$ *est une topologie sur* $\mathbb{X}$*.*

Preuve. *(Exercice)*

Maintenant, en utilisant les deux propositions précédentes on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.9. *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Alors, une famille de parties* $\mathfrak{B}$ *de* $\mathbb{X}$ *est une base de* $\mathcal{T}$ *si et seulement si* $\mathfrak{B}$ *vérifie les deux propriétés de la proposition (1.7)*

Proposition 1.10. *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathfrak{B}$ *une partie de* $\mathcal{T}$*. Alors,* $\mathfrak{B}$ *est une base de* $\mathcal{T}$ *si et seulement si pour tout* $O \in \mathcal{T}$ *et pour tout* $x \in O$ *il existe* $U_x \in \mathfrak{B}$ *tel que :* $x \in U_x \subset O$*.*

Preuve. $\Longleftarrow$) *Il est évident que* $O = \bigcup\limits_{x \in O} U_x$*, donc* $\mathfrak{B}$ *est une base de* $\mathcal{T}$*.*

$\Longrightarrow$) *Si* $\mathfrak{B}$ *est une base de* $\mathcal{T}$*, alors toute partie* O *de* $\mathcal{T}$ *est une réunion d'éléments de* $\mathfrak{B}$ *d'où pour tout élément de* $x \in O$ *il existe* $U_x \in \mathfrak{B}$ *tel que :* $x \in U_x \subset O$*.*

Proposition 1.11. *Soit* $\mathfrak{B}_1$ *une base de d'une topologie* $\mathcal{T}$ *et* $\mathfrak{B}_2$ *une famille de partie de* $\mathcal{T}$*. Si tout élément de* $\mathfrak{B}_1$ *une réunion d'éléments de* $\mathfrak{B}_2$*, alors* $\mathfrak{B}_2$ *est une base de* $\mathcal{T}$*.*

Preuve. *Soit* $O \in \mathcal{T}$*. Alors, il existe* $\{O_i : i \in I \text{ et } O_i \in \mathfrak{B}_1\}$ *tel que :* $O = \bigcup\limits_{i \in I} O_i$ *(car* $\mathfrak{B}_1$ *est une base de* $\mathcal{T}$ *) et puisque tout élément de* $\mathfrak{B}_1$ *une réunion d'éléments de* $\mathfrak{B}_2$*, alors il existe* $\{U_{i,j} : j \in J \text{ et } U_{i,j} \in \mathfrak{B}_2\}$ *tel que :* $O_i = \bigcup\limits_{j \in J} U_{i,j}$ *pour tout* $i \in I$*, d'où on obtient :* $O = \bigcup\limits_{i,j \in I \times J} U_{i,j}$ *donc* $\mathfrak{B}_2$ *est une base de* $\mathcal{T}$*.*

Dans la section suivante on donne les quatre types de points d'un espace topologique.

1.5 Points intérieures, points adhérents, points frontières, points extérieures, parties denses

1.5.1 Points intérieurs

Définition 1.8. *Soit* A *une partie d'un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$*. On dit que* x *est un point intérieur de* A *si* A *est un voisinage de* x*, autrement dit,*

$$x \text{ un point intérieur de } A \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}(x). \tag{1.4}$$

L'ensemble de tous les points intérieurs de A *est appelé l'intérieur ou l'ouverture de* A *et on le dénote par* $Int(A)$*.*

Exemple 1.9. *1. Si* A *est une partie de* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Gros})$ *on a les deux cas suivant :*

- $\mathbb{X} = A \Longrightarrow Int(A) = \mathbb{X}$.
- $\mathbb{X} \neq A \Longrightarrow Int(A) = \phi$.

2. *Si A est une partie de $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Disc})$ on a $Int(A) = A$.*
3. *Si $(\mathbb{X}, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, |.|)$ on a :*
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ Int\{x\} = \phi$.
   - $\forall x, y \in \mathbb{R},\ Int[x,y] = Int[x,y[= Int]x,y] = Int]x,y[=]x,y[$.
4. $Int(\mathbb{N}) = Int(\mathbb{Z}) = Int(\mathbb{Q}) = Int(\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) = \phi$.
5. *Si $\mathbb{X} = \{x,y,z,t\}$ et $\mathcal{T} = \{\mathbb{X}, \phi, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$ alors on a :*
   - $Int\{z\} = Int\{t\} = \phi$.
   - $Int\{x,z,t\} = \{x\}$.

Proposition 1.12. *$Int(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A.*

Preuve. *On va montrer que $Int(A)$ est l'union de toutes les parties ouvertes de A. Pour tout $x \in Int(A)$, on a $A \in \mathcal{V}(x)$ (voir définition (1.8)). En utilisant la définition (1.1) on conclut que : pour tout $x \in Int(A)$ il existe $O_x \in \mathcal{T}$ tel que : $x \in O_x \subset A$ d'où on obtient :*

$$(*) \qquad Int(A) \subset \bigcup_{x \in Int(A)} O_x \subset \bigcup_{x \in A} O_x.$$

Réciproquement, si $x \in \bigcup_{x \in A} O_x$ alors $x \in O_x \subset A$ d'où $A \in \mathcal{V}(x)$ donc $x \in Int(A)$ ce qui signifie que :

$$(**) \qquad \bigcup_{x \in A} O_x \subset Int(A).$$

D'après $(*)$ et $(**)$ on conclut que :

$$Int(A) = \bigcup_{x \in A} O_x.$$

Finalement, $Int(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A car c'est l'union de toutes les parties ouvertes de A.

La proposition précédente nous permet d'écrire le résultat suivant :

$$A \text{ est ouvert dans } \mathbb{X} \Longleftrightarrow A = Int(A). \tag{1.5}$$

Proposition 1.13. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et A, B deux parties de $\mathbb{X}$. Alors, on a :*

1. $A \subset B$ *et* A *ouvert* $\Longrightarrow A \subset Int(B)$.
2. $A \subset B \Longrightarrow Int(A) \subset Int(B)$.
3. $Int(A) = Int(Int(A))$.
4. $Int(A \bigcap B) = Int(A) \bigcap Int(B)$.
5. $Int(A) \bigcup Int(B) \subset Int(A \cup B)$.

6. $A \in \mathcal{V}(B) \Longleftrightarrow B \subset Int(A)$.

Preuve. *(Exercice).*

Remarque 1.6. *On a* $Int(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} Int(A_i)$ *si* I *non fini.*

1.5.2 Points adhérents

Définition 1.9. *Soit* $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ *un espace topologique,* $A \subset \mathbb{X}$ *et* $x \in \mathbb{X}$. *On dit que* x *est un point adhérent à* A *si et seulement si tout* $V \in \mathcal{V}(x)$ *contient au moins un point de* A. *Autrement dit :*

$$x \text{ un point adhérent de } A \Longleftrightarrow \forall\ V \in \mathcal{V}(x),\ V \bigcap A \neq \phi. \tag{1.6}$$

L'ensemble de tous les points adhérents à A *est appelé l'adhérence ou la fermeture de* A *et on le note par* $Adh(A)$.

Remarque 1.7. *Il découle de cette définition que* $A \subset Adh(A)$.

Exemple 1.10.
1. *Si* A *est une partie non vide de* $(\mathbb{X},\mathcal{T}_{Gros})$ *alors on a :* $Adh(A) = \mathbb{X}$.
2. *Si* A *est une partie de* $(\mathbb{X},\mathcal{T}_{Disc})$ *on a* $Adh(A) = A$.
3. *Si* $(\mathbb{X},\mathcal{T}) = (\mathbb{R},|.|)$ *on a :*
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ Adh\{x\} = \{x\}$.
   - $\forall x,y \in \mathbb{R},\ Adh[x,y] = Adh[x,y[= Adh]x,y] = Adh]x,y[= [x,y]$.
   - $Adh(\mathbb{Q}) = Adh(\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) = \mathbb{R},\ Adh(\mathbb{N}) = \mathbb{N},\ Adh(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
4. *Si* $\mathbb{X} = \{x,y,z,t\}$ *et* $\mathcal{T} = \{\mathbb{X},\phi,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$ *alors on a par exemple :*
   - $Adh\{x\} = \{x,z,t\},\ Adh\{y\} = \{y,z,t\}$.
   - $Adh\{z\} = \{z,t\},\ Adh\{t\} = \{z,t\}$.

Proposition 1.14. $Adh(A)$ *est le plus petit fermé qui contient* A.

Preuve. *On va montrer que* $Adh(A)$ *est l'intersection de toutes les parties fermées de* A.
Soit $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ *tel que* F_i *un fermé qui contient* A *et ce pour tout* $i \in I$.

$\Longrightarrow$) *Supposons qu'il existe* $x \in F$ *et* $x \notin Adh(A)$ *alors il existe un ouvert* $O \in \mathcal{V}(x)$ *tel que* $O \bigcap A = \phi$ *d'où* $A \subset \complement_{\mathbb{X}} O$ *donc* $\complement_{\mathbb{X}} O$ *est un fermé qui contient* A *et* $x \notin \complement_{\mathbb{X}} O$ *ce qui contredit que* $x \in F$ *alors on a :*

$$F \subset Adh(A). \tag{*}$$

$\Longleftarrow$) *Supposons qu'il existe* $x \in Adh(A)$ *et* $x \notin F$ *alors* $x \in \complement_{\mathbb{X}} F$ *(ouvert) mais* $\complement_{\mathbb{X}} F \bigcap A = \phi$ *d'où* $x \notin Adh(A)$ *ce qui contredit* $x \in Adh(A)$. *Alors, on a :*

$$Adh(A) \subset F. \tag{**}$$

D'après $(*)$ *et* $(**)$ *on conclu que* $Adh(A)=F$. *Donc,* $Adh(A)$ *est le plus petit fermé qui contient* A.

La proposition précédente nous permet d'écrire le résultat suivant :

$$A \text{ est fermé dans } \mathbb{X} \Longleftrightarrow A = Adh(A). \tag{1.7}$$

Maintenant, voici un résultat qui récapitule les propriétés de l'adhérence.

Proposition 1.15. *Soient* A *et* B *deux parties de l'espace topologique* $(\mathbb{X},\mathcal{T})$. *Alors, on a :*

1. $A \subset B \Longrightarrow Adh(A) \subset Adh(B)$.
2. $Adh(A \bigcup B) = Adh(A) \bigcup Adh(B)$.
3. $Adh(A \bigcap B) \subset Adh(A) \bigcap Adh(B)$.
4. $\complement_{\mathbb{X}} Adh(A) = Int(\complement_{\mathbb{X}} A)$.
5. $Adh(\complement_{\mathbb{X}} A) = \complement_{\mathbb{X}} Int(A)$.
6. $Adh(Adh(A)) = Adh(A)$.

Preuve. *(Exercice).*

Exemple 1.11. *Si* $A =]1,2[$ *et* $B =]2,3[$, *alors* $Adh(A \bigcap B) = \emptyset$. *Or* $Adh(A) \bigcap Adh(B) = [1,2] \bigcap [2,3] = \{2\}$. *Cet exemple montre qu'en général l'inclusion dans* 3) *n'est pas une égalité.*

Remarque 1.8. *On a* $\bigcup\limits_{i \in I} Adh(A_i) \subset Adh(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)$ *si* I *non fini.*

Les points adhérents sont deux types.

• Points d'accumulations

Définition 1.10. *Soit* $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ *un espace topologique,* $A \subset \mathbb{X}$ *et* $x \in \mathbb{X}$. *On dit que* x *est un point d'accumulation de* A *si et seulement si tout* $V \in \mathcal{V}(x)$ *contient au moins un point de* A *autre que* x. *Autrement dit :*

$$x \text{ un point d'accumulation de } A \Longleftrightarrow \forall\ V \in \mathcal{V}(x),\ (V - \{x\}) \bigcap A \neq \phi. \tag{1.8}$$

L'ensemble de tous les points d'accumulation de A *est appelé l'ensemble dérivé de* A *et on le note par* A'.

Il découle de cette définition que tout point adhérent à A et n'appartient pas à A est un point d'accumulation. Donc on a le résultat suivant :

$$A' \bigcup A = Adh(A). \tag{1.9}$$

Exemple 1.12. 1. *Soient* $\mathbb{X} = \{x,y,z,t,s\}$, $\mathcal{T} = \{\phi, \mathbb{X}, \{x,y\}, \{z,t,s\}\}$ *et* $A = \{x,y,z\}$. *Alors, on a* $A' = \{x,y\}$.

2. *Si A est une partie d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Disc})$ alors $A' = \phi$.*
3. *Dans $(\mathbb{R}, |.|)$ on a $\mathbb{N}' = \mathbb{Z}' = \phi$*

Proposition 1.16. *Une partie A d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est fermée si et seulement si elle contienne tous ses points d'accumulation.*

Preuve. *Évidente. (d'après la relation (1.9))*

- **Points isolés**

Définition 1.11. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset \mathbb{X}$. On dit qu'un point $x \in A$ est un point isolé si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ qui ne contient aucun point de A autre que x. Autrement dit :*

$$x \text{ un point isolé dans } A \Longleftrightarrow \exists\, V \in \mathcal{V}(x),\ V \bigcap A = \{x\}. \tag{1.10}$$

L'ensemble de tous les points isolés de A est noté par $Is(A)$.

Exemple 1.13. 1. *Dans l'espace topologique $(\mathbb{R}, |.|)$ on a $Is(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ et $Is(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

2. *Tout point d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Disc})$ est isolé.*
3. *Soient $\mathbb{X} = \{x, y, z, t, s\}$, $\mathcal{T} = \{\phi, \mathbb{X}, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ et $A = \{y, z, t\}$. Alors, on a $Is(A) = \{y\}$.*

1.5.3 Points frontières

Définition 1.12. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique, $A \subset \mathbb{X}$ et $x \in \mathbb{X}$. On dit que x est un point frontière de A s'il est adhérent à la fois à A et à $\complement_{\mathbb{X}} A$. Autrement dit :*

$$x \text{ un point frontière de } A \Longleftrightarrow x \in Adh(A) \cap Adh(\complement_{\mathbb{X}} A). \tag{1.11}$$

L'ensemble de tous les points frontières de A est appelé frontière de A et on le dénote par $Fr(A)$.

Remarque 1.9. *En utilisant la propriété (5) de la proposition (1.15) on obtient le résultat suivant :*

$$\begin{aligned} Fr(A) &= Adh(A) \cap Adh(\complement_{\mathbb{X}} A) \\ &= Adh(A) \cap \complement_{\mathbb{X}} Int(A) \\ &= Adh(A) - Int(A). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Maintenant, voici un résultat qui récapitule les propriétés de la frontière.

Proposition 1.17. *Soit A une partie d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. Alors, on a :*

1. *$Fr(A)$ est une partie fermée.*

2. A *est à la fois ouvert et fermé* $\Longleftrightarrow Fr(A) = \emptyset$.
3. A *est ouvert* $\Longleftrightarrow Fr(A) \cap A = \emptyset$.
4. A *est fermé* $\Longleftrightarrow Fr(A) \subseteq A$.

Preuve. *(Exercice).*

Exemple 1.14. 1. *Si* A *est une partie d'un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Gros})$ *alors,* $Fr(A) = \mathbb{X}$.

2. *Si* A *est une partie d'un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Disc})$ *alors,* $Fr(A) = \emptyset$.
3. *Dans l'espace* $(\mathbb{R}, |.|)$ *:*
   - *Si* $A =]a,b[$ *alors,* $Fr(A) = Adh(A) - Int(A) = [a,b] -]a,b[= \{a,b\}$
   - *Si* $A = \mathbb{Z}$ *alors* $Fr(A) = Adh(A) - Int(A) = \mathbb{Z} - \emptyset = \mathbb{Z}$

1.5.4 Points extérieurs

Définition 1.13. *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $A \subset \mathbb{X}$ *et* $x \in \mathbb{X}$. *On dit que* x *est un point extérieur à* A *s'il appartient à l'intérieur de* $\complement_{\mathbb{X}} A$. *Autrement dit :*

$$x \text{ est un point extérieur à } A \Longleftrightarrow x \in Int(\complement_{\mathbb{X}} A). \tag{1.13}$$

L'ensemble de tous les points extérieurs à A *est appelé l'extérieur de* A *et on le dénote par* $Ext(A)$.

Remarque 1.10. *En utilisant la propriété (4) de la proposition (1.15) on obtient le résultat suivant :*

$$Ext(A) = Int(\complement_{\mathbb{X}} A) = \complement_{\mathbb{X}} Adh(A). \tag{1.14}$$

Maintenant, voici un résultat qui récapitule les propriétés de la frontière.

Proposition 1.18. *Soient* A *et* B *deux parties d'un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. *Alors, on a :*

1. $Ext(A)$ *est une partie ouverte.*
2. $Ext(A) \subseteq \complement_{\mathbb{X}} A$.
3. $Ext(A) = Ext(\complement_{\mathbb{X}} Ext(A))$.
4. $Ext(A \cup B) = Ext(A) \cap Ext(B)$.
5. $Adh(A) = \mathbb{X} \Longleftrightarrow Ext(A) = \emptyset$.

Preuve. *(Exercice).*

1.5.5 Parties denses

Définition 1.14. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique et A et B deux parties de $\mathbb{X}$. On dit que A est dense dans B si et seulement si tout point de B est un point adhérent de A, autrement dit :*

$$A \text{ est dense dans } B \Longleftrightarrow B \subset Adh(A), \tag{1.15}$$

et on dit que A est dense $\mathbb{X}$ si et seulement si $Adh(A) = \mathbb{X}$ ou $Int(C_{\mathbb{X}}A) = \emptyset$.

Exemple 1.15.

1. *Si $\mathbb{X}$ est muni de la topologie grossière, alors toute partie de $\mathbb{X}$ est dense dans $\mathbb{X}$.*
2. *Si $\mathbb{X}$ est muni de la topologie discrète et A et B deux partie de $\mathbb{X}$ telles que $B \subset A$, alors A est dense dans B. De plus, il n'existe aucune partie $A \neq \mathbb{X}$ dense dans $\mathbb{X}$.*
3. *Dans $(\mathbb{R},|.|)$ on pose $A = [a,b[$ et $B =]a,b[$. Il est claire que A est dense dans B car $B \subset Adh(A) = [a,b]$*
4. *On a vu que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*
5. *Soit $\mathbb{X} = \{x,y,z,t\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{x\}, \{x,y\}\}$. On pose $A = \{t\}$ et $B = \{x,z\}$, on a B est dense dans A car $A \subset Adh(B) = \mathbb{X}$ mais A n'est pas dense dans B car $B \not\subset Adh(A) = \{z,t\}$.*

Proposition 1.19. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique et A,B et C trois parties de $\mathbb{X}$. Si A est dense dans B et B est dense dans C, alors A est dense dans C.*

Preuve. *On a :*

$$A \text{ est dense dans } B \Longleftrightarrow B \subset Adh(A) \text{ d'où } Adh(B) \subset Adh(A)...(*).$$

D'autre part on a :

$$B \text{ est dense dans } C \Longleftrightarrow C \subset Adh(B)...(**).$$

D'après $(*)$ et $(**)$ on conclut que $C \subset Adh(A)$, alors A est dense dans C.

Remarque 1.11. *La proposition précédente montre que la densité est une notion transitive.*

La propriété suivante est une caractérisation très pratique des parties denses.

Proposition 1.20. *A est dense dans $\mathbb{X}$ si et seulement si tout ouvert non vide de $\mathbb{X}$ contient au moins un point de A.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que A est une partie dense dans $\mathbb{X}$ et O un ouvert non vide de $\mathbb{X}$. Puisque $Adh(A) = \mathbb{X}$, il vient que $O \subset Adh(A)$ d'où $A \bigcap O \neq \emptyset$ car O est un voisinage de chacun de ses points.*

$\Longleftarrow$) *Supposons que pour tout ouvert O de $\mathbb{X}$ on a $A \cap O \neq \emptyset$. Alors, pour tout voisinage V d'un point $x \in \mathbb{X}$ on aura $V \cap A \neq \emptyset$ car V contient un ouvert non vide. Donc, $x \in Adh(A)$ d'où $Adh(A) = \mathbb{X}$.*

1.6 Espaces séparés (Hausdorff)

Définition 1.15. *Un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est dit séparé ou Hausdorff si et seulement si pour tous deux points distincts x et y de $\mathbb{X}$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.*

Exemple 1.16. 1. *L'espace $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Disc})$ est séparé.*

2. *Si $card(\mathbb{X}) \geqslant 2$ l'espace $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Gros})$ n'est pas séparé.*
3. *L'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ est séparé.*
4. *L'espace $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Cof})$ n'est pas séparé.*

Proposition 1.21. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors, $\mathbb{X}$ est séparé si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{X}$ on a $\{x\} = \bigcap\limits_{V_x \in \mathcal{V}(x)} V_x \ldots (*)$, tel que V_x est voisinage fermé de x.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Soit $\mathbb{X}$ un espace topologique séparé et $x \in \mathbb{X}$. On veut montrer que $\{x\} = \bigcap\limits_{V_x \in \mathcal{V}(x)} V_x$ tel que V_x est voisinage fermé de x. Supposons qu'il existe $y \in \bigcap\limits_{V_x \in \mathcal{V}(x)} V_x$ tel que $y \neq x$, alors ils existent deux voisinages ouverts U et W de x et y, respectivement, tels que $U \cap W = \emptyset$ ce qui signifie que $C_{\mathbb{X}}W$ est un voisinage fermé de x (car il contient U) ce qui contredit l'appartenance de y à tous les voisinages fermés de x.*

$\Longleftarrow$) *Réciproquement, soient $x, y \in \mathbb{X}$ tels que $x \neq y$. Il découle de l'égalité $(*)$ qu'il existe un voisinage fermé V_x de x qui ne contient pas y , donc il existe un ouvert O qui vérifie : $x \in O \subset Adh(O) \subset V_x$, alors $y \notin Adh(O)$. En fin, on conclut que O et $C_{\mathbb{X}}Adh(O)$ sont deux ouverts disjoints qui contiennent x et y , respectivement, donc $\mathbb{X}$ est séparé.*

En utilisant la proposition précédente on obtient le résultats suivant :

Proposition 1.22. *Tout singleton d'un espace séparé est fermé et en générale toute partie finie d'un espace séparé est fermée.*

Proposition 1.23. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $x \in \mathbb{X}$. Alors, x est un point d'accumulation d'une partie A de $\mathbb{X}$ si et seulement si tout voisinage V_x de x contient une infinité de points de A.*

Preuve. $\Longleftarrow$) *Évidente.*

$\Longrightarrow$) *Supposons qu'il existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ qui contient un nombre fini de points $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de A, alors $W = V_x - \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est un voisinage de x et $(W - \{x\}) \bigcap A = \emptyset$. Donc, x n'est pas un point d'accumulation de A.*

Remarque 1.12. *Il vient de la proposition précédente que toute partie finie d'un espace topologique séparé ne possède aucun point d'accumulation.*

1.7 Topologie induite, topologie produit

1.7.1 Topologie induite

Définition 1.16. *Soit A une partie non vide d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. On appelle la trace d'un ouvert $O \in \mathcal{T}$ sur A la partie O_A définie par : $O_A = A \cap O$. La famille des traces des ouverts de $\mathbb{X}$ sur A est notée par $\mathcal{T}_A$ et on écrit :*

$$\mathcal{T}_A = \{O_A = A \cap O : O \in \mathcal{T}\}. \tag{1.16}$$

Définition 1.17. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie non vide de $\mathbb{X}$. La famille $\mathcal{T}_A$ définie par la relation (1.16) est une topologie sur A appelée la topologie induite par la partie A. On dit que $(A, \mathcal{T}_A)$ est un sous-espace topologique de $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$.*

Exercice. *Montrer que $\mathcal{T}_A$ est une topologie sur A.*

Exemple 1.17. *Considérons la topologie*

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{X}, \emptyset, \{x\}, \{z,t\}, \{x,z,t\}, \{y,z,t,s\}\},$$

sur $\mathbb{X} = \{x, y, z, t, e\}$ et le sous-ensemble $A = \{x, t, s\}$ de $\mathbb{X}$. Remarquons que $\mathbb{X} \cap A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$, $\{x\} \cap A = \{x\}$, $\{z,t\} \cap A = \{t\}$, $\{x,z,t\} \cap A = \{x,t\}$, $\{y,z,t,s\} \cap A = \{t,s\}$. Ainsi la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A est

$$\mathcal{T}_A = \{A, \emptyset, \{x\}, \{t\}, \{x,t\}, \{t,s\}\}.$$

Exemple 1.18. *Considérons la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ et la topologie induite $\mathcal{T}_A$ sur l'intervalle fermé $A = [4,9]$. Notons que l'intervalle semi-ouvert $[4,6[$ est un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}_A$ puisque $[4,6[=]3,6[\cap A$ où $]3,6[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Ainsi nous voyons qu'un ensemble peut être ouvert relativement à un sous-espace mais ni ouvert ni fermé dans l'espace tout entier.*

Exemple 1.19. *Considérons la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ et la topologie induite $\mathcal{T}_A$ sur $A = \mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{N} \cap]n-1, n+1[= \{n\} \in \mathcal{T}_A$. On conclut que $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ est un espace discret.*

Proposition 1.24. *Soit $(\mathbb{A}, \mathcal{T}_A)$ un sous-espace d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ et F' une partie de A. Alors, F' est un fermé de A pour la topologie induite $\mathcal{T}_A$ si et seulement si il existe $F \in \mathcal{F}$ (où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés de $\mathbb{X}$) tel que $F' = A \cap F$.*

Preuve. *On a F' est un fermé de A si et seulement si $\complement_A F'$ est un ouvert de A, c-à-d si et seulement si il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $\complement_A F' = A \cap O$. Donc, F' est un fermé de A si et seulement si il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $F' = \complement_A(\complement_A F') = \complement_A(A \cap O) = A \cap (\complement_{\mathbb{X}} O)$, c-à-d si et seulement si il existe $F = \complement_{\mathbb{X}} O \in \mathcal{F}$ tel que $F' = A \cap F$.*

On peut facilement montrer le résultat suivant.

Proposition 1.25. *Soit $(\mathbb{A}, \mathcal{T}_A)$ un sous-espace d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ et B une partie de A. Si B est un ouvert(resp. fermé) dans $\mathbb{X}$, alors B est un ouvert (resp. fermé) dans A.*

Preuve. *Il suffit de voir que $B = B \cap A$.*

Remarque 1.13. *Les deux exemples (1.18) et (1.19) montrent que la réciproque du résultat précédent n'est pas forcément vrais.*

Proposition 1.26. *Soit $(\mathbb{A}, \mathcal{T}_A)$ un sous-espace d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. Alors, tout ouvert (resp. fermé) dans A est un ouvert (resp. fermé) dans $\mathbb{X}$ si et seulement si A est un ouvert(resp. fermé) dans $\mathbb{X}$.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que tout ouvert dans A est un ouvert dans $\mathbb{X}$, alors A est un ouvert dans $\mathbb{X}$.*

$\Longleftarrow$) *Supposons que A est un ouvert de $\mathbb{X}$ et soit O_A un ouvert de A, alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $O_A = A \cap O$ qui est un ouvert dans $\mathbb{X}$ car $A \in \mathcal{T}$. (Par des arguments similaires on montre ce résultat pour les fermés).*

Proposition 1.27. *Soit $(\mathbb{A}, \mathcal{T}_A)$ un sous-espace d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. Alors, on a*

1. *Si $x \in A$, alors V' est un voisinage de x dans A si et seulement si il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ (où $\mathcal{V}(x)$ est la famille des voisinages de x dans $\mathbb{X}$) tel que $V' = V \cap A$.*
2. *Si $\mathcal{S}(x)$ est un SFV de x dans $\mathbb{X}$, alors $\{V \cap A : V \in \mathcal{S}(x)\}$ est un SFV de x dans A pour la topologie induite $\mathcal{T}_A$.*
3. *Si B est une partie de A, alors on a :*
   - ***a**) $Adh(B)_A = A \cap Adh(B)$ (où $Adh(B)_A$ et $Adh(B)$ sont les adhérences de B pour $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}$, respectivement.)*
   - ***b**) $Adh(B)_A = Adh(B) \Longleftrightarrow A$ est fermé dans $\mathbb{X}$.*
   - ***c**) $A \cap Int(B) \subset Int(B)_A$*
4. *Si $\mathfrak{B}$ est une base de $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, alors $\mathfrak{B}_A = \{\beta \cap A : \beta \in \mathfrak{B}\}$ est une base de $(A, \mathcal{T}_A)$.*

Preuve. 1. *Si V' est un voisinage de x dans A, alors il existe un ouvert $A \cap O \in \mathcal{T}_A$ (c-à-d, il existe $O \in \mathcal{T}$) tel que $x \in A \cap O \subset V'$. Ainsi, si on pose $V = O \cup V'$ on obtient $x \in O \subset V$ donc V est un voisinage de x dans $\mathbb{X}$ et on a $V \cap A = (O \cup V') \cap A = (O \cap A) \cup (V' \cap A) = (O \cap A) \cup V' = V'$.*

Réciproquement, si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subset V$. Ainsi, $x \in A \cap O \subset A \cap V$ d'où $V' = A \cap V$ est un voisinage de x dans A car $A \cap O$ est un ouvert dans A.

2. *Soit $V' = V \cap A$ un voisinage de x dans A pour la topologie induite, avec V un voisinage de X dans $\mathbb{X}$. Si $\mathcal{S}(x)$ est un SFV de x dans $\mathbb{X}$, alors il existe $W \in \mathcal{S}(x)$ tel que $W \subset V$ d'où $W \cap A \subset V'$. On en déduit que $\{V \cap A : V \in \mathcal{S}(x)\}$ est un SFV de x dans A.*

3. ***a***) *Si $x \in Adh(B)_A$, alors pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ (pour la topologie $\mathcal{T}$) on a $(V \cap A) \cap B \neq \emptyset$ et donc $x \in A$ et $x \in Adh(B)$ d'où on obtient*

$$x \in A \cap Adh(B)...(*)$$

D'autre part, si $x \in A \cap Adh(B)$ alors tout voisinage $V \cap A$ de x dans A rencontre B car V rencontre B et $B \subset A$ d'où on obtient

$$x \in Adh(B)_A...(**)$$

En fin, d'après $(*)$ et $(**)$ on conclut que $Adh(B)_A = A \cap Adh(B)$.

b) *Supposons que pour toute partie B de A on a $Adh(B)_A = Adh(B)$, alors $A = Adh(A)_A = Adh(A)$ car A est fermé dans A d'où A est fermé dans $\mathbb{X}$.*

Réciproquement, si A est fermé dans $\mathbb{X}$, alors $Adh(B) \subset Adh(A) = A$ d'où $Adh(B)_A = A \cap Adh(B) = Adh(B)$.

c) *On a $A \cap Int(B)$ est un ouvert de A inclus dans B, donc $A \cap Int(B) \subset Int(B)_A$.*

4. *Soit U un ouvert de A, alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $U = A \cap O$ mais $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ tel que $O_i \in \mathcal{T}$ pour tout $i \in I$ d'où on obtient $U = A \cap (\bigcup_{i \in I} O_i) = \bigcup_{i \in I} A \cap O_i$ ce qui termine la démonstration.*

Définition 1.18. *Une propriété topologique est héréditaire si chaque fois qu'un espace topologique possède cette propriété, il en est alors de même pour chacun de ses sous-espaces.*

Proposition 1.28. *Tout sous-espace d'un espace séparé est séparé.*

Preuve. *Soit $(A, \mathcal{T}_A)$ un sous espace topologique d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ et $x, y \in A$ tels que $x \neq y$. Puisque $\mathbb{X}$ séparé alors il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tel que $V \cap W = \emptyset$ d'où $(A \cap V) \cap (A \cap W) = \emptyset$. Donc, $(A \cap V)$ et $(A \cap W) = \emptyset$ sont* *deux voisinages de x et y, respectivement, disjoints dans A ce qui montre que A est séparé.*

Le résultat suivant montre la transitivité de la topologie induite.

Proposition 1.29. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $B \subset A \subset \mathbb{X}$ deux parties de $\mathbb{X}$. On note par $\mathcal{T}'_B$ la topologie induite sur B par $\mathcal{T}_A$. Alors, on a*

$$\mathcal{T}_B = \mathcal{T}'_B.$$

Preuve. *Si $U \in \mathcal{T}_B$, alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $U = B \cap O$ et puisque $A \cap O \in \mathcal{T}_A$ on obtient $U = B \cap O = B \cap (A \cap O) \in \mathcal{T}'_B$.*

Réciproquement, si $U \in \mathcal{T}'_B$, alors il existe $O_A \in \mathcal{T}_A$ tel que $U = B \cap O_A$ et puisque $O_A \in \mathcal{T}_A$ il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $O_A = A \cap O$. Ainsi $U = B \cap (A \cap O) = B \cap O$, et donc $U \in \mathcal{T}_B$.

1.7.2 Topologie produit

Définition 1.19. *Soient $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1), (\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2), ..., (\mathbb{X}_n, \mathcal{T}_n)$ n-espaces topologiques et $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times .... \times \mathbb{X}_n$. On appelle ouvert élémentaire de $\mathbb{X}$ toute partie $O \subset \mathbb{X}$ de la forme $O = O_1 \times O_2 \times ... \times O_n$ tel que $O_i \in \mathcal{T}_i$, $i = 1, ..., n$ et on appelle ouvert de $\mathbb{X}$ toute réunion d'ouverts élémentaires. La famille formée de l'ensemble vide et des réunions quelconques d'ouverts élémentaires définit une topologie sur $\mathbb{X}$ appelée topologie produit.*

Notons cette famille par $\mathcal{T}$ et montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.

Preuve.
1. *On a $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times .... \times \mathbb{X}_n \in \mathcal{T}$ et $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \times .... \times \emptyset \in \mathcal{T}$ car ce sont des ouverts élémentaires.*
2. *Si $\{O_i : i \in I\}$ une famille de parties ouvertes de $\mathbb{X}$, alors on a :*

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} \left(O^1_{i,j} \times ... \times O^n_{i,j} \right) \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} \left(O^1_{i,j} \times ... \times O^n_{i,j} \right) \in \mathcal{T},$$

   car c'est une réunion quelconque d'ouverts élémentaires.
3. *Il suffit de montrer que si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, alors $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.*
   Puisque $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ alors $O_1 = \bigcup_{i \in I} V_i$ et $O_2 = \bigcup_{j \in J} W_j$ tels que V_i et W_j sont des ouverts élémentaires pour tout $i \in I$ et $j \in J$. Donc, on obtient :

$$O_1 \bigcap O_2 = (\bigcup_{i \in I} V_i) \bigcap (\bigcup_{j \in J} W_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} \left(V_i \bigcap W_j \right).$$

   Il suffit de montrer maintenant que $V_i \bigcap W_j$ est un ouvert élémentaire pou tout $i \in I$ et $j \in J$. Par définition on a $V_i = R^i_1 \times ... \times R^i_n$ et $W_j = K^j_1 \times ... \times K^j_n$ tels *que $R^i_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ et $K^j_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ pour tout $\alpha = 1,...,n$ ce qui nous permet d'écrire :*

$$V_i \bigcap W_j = (R^i_1 \bigcap K^j_1) \times (R^i_2 \bigcap K^j_2) \times ... \times (R^i_n \bigcap K^j_n),$$

et comme $R^i_\alpha \bigcap K^j_\alpha$ sont des parties ouverts de $\mathcal{T}_\alpha$, $\alpha = 1,...,n$ alors $V_i \bigcap W_j$ est un ouvert élémentaire. En fin, nous concluons que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.

En utilisant la définition (1.19) on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.30. *La famille des ouverts élémentaires est une base de la topologie produit.*

Exemple 1.20.
1. *Les ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont des réunions des ouverts élémentaires de la forme $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ tels que $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1,...,n$.*
2. *Soit $\{(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i) : i = 1,...,n\}$ une famille d'espaces discrets, alors le produit $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$ est un espace discret. En effet, si $O = \prod_{i=1}^{n} O_i$ est un ouvert élémentaire différent de $\mathbb{X}$ alors il existe i_0 tel que $O_{i_0} \neq \mathbb{X}_{i_0}$ et puisque $\mathcal{T}_{i_0} = \{\mathbb{X}_{i_0}, \emptyset\}$ on obtient $O_{i_0} = \emptyset$ d'où $O = \emptyset$ et donc la famille des ouverts élémentaires est $\{\mathbb{X}, \emptyset\}$ ce qui montre que $\mathbb{X}$ est un espace discret.*

Proposition 1.31. *Soit $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$ un produit d'espaces topologiques et $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{X}$. Notons par $\mathcal{S}$ la famille des ensembles de la formes $V_1 \times ... \times V_n$ tel que $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$ dans $\mathbb{X}_i$, $i = 1,...,n$. Alors, $\mathcal{S}$ est un système fondamentale de voisinage (SFV) de x dans $\mathbb{X}$.*

Preuve. *Si $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$, $i = 1,...,n$, alors il existe $O_i \in \mathcal{T}_i$ tel que $x_i \in O_i \subset V_i$ d'où on obtient $x \in O_1 \times ... \times O_n \subset V_1 \times ... \times V_n$ et puisque $O_1 \times ... \times O_n$ est un ouvert dans $\mathbb{X}$ on conclut que $V_1 \times ... \times V_n$ est un voisinage de x dans $\mathbb{X}$.*

Maintenant, soit $V \in \mathcal{V}(x)$ dans $\mathbb{X}$, alors il existe un ouvert $O \subset \mathbb{X}$ tel que $x \in O \subset \mathbb{X}$. Soit $W = O_1 \times ... \times O_n$ un élément élémentaire qui contient x(car O est une réunion d'ouverts élémentaires), alors $W \in \mathcal{S}$ car $O_i \in \mathcal{V}(x_i)$ pour tout $i = 1,...,n$ et on a $W \subset V$ ce qui termine la démonstration (voir la définition (1.6)).

Exemple 1.21. *Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle et $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$. La famille $\left\{\prod_{i=1}^{n}]x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i[\ : i = 1,...,n\right\}$ tels que $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) \in (\mathbb{R}^*_+)^n$ est un (SFV) de x. De même, la famille $\left\{\prod_{i=1}^{n}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\ : i = 1,...,n\right\}$ tel que $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ est un (SFV) de x.*

Proposition 1.32. *Soit $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ une partie d'un espace produit $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$. Alors, on a :*

$$Adh(A) = \prod_{i=1}^{n} Adh(A_i).$$

Preuve. *Soit $x = (x_1,...,x_n) \in Adh(A)$. Alors pour tout $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$ on a :*

$$(V_1 \cap A_1) \times ... \times (V_n \cap A_n) = (V_1 \times ... \times V_n) \cap A \neq \emptyset,$$

d'où $V_i \cap A_i \neq \emptyset$ *pour tout* $i = 1,...,n$ *et donc* $x_i \in Adh(A_i)$ *pour tout* $i = 1,...,n$ *ce qui montre que* $x \in \prod_{i=1}^{n} Adh(A_i)$.

Réciproquement, si $x \in \prod_{i=1}^{n} Adh(A_i)$. *Alors, pour tout* $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$, $i = 1,...,n$, *on a* $V_i \cap A_i \neq \emptyset$ *d'où* $(V_1 \cap A_1) \times ... \times (V_n \cap A_n) = (V_1 \times ... \times V_n) \cap A \neq \emptyset$ *et donc* $x \in Adh(A)$.

En utilisant la proposition précédente on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.33. *Soit* $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ *une partie d'un espace produit* $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$. *Alors,* A *est fermé dans* $\mathbb{X}$ *si et seulement si* A_i *est fermé dans* $\mathbb{X}_i$ *pour tout* $i = 1,...,n$.

Proposition 1.34. *Un espace produit* $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$ *est séparé si et seulement si* $\mathbb{X}_i$ *est séparé pour tout* $i = 1,...,n$.

Preuve. $\Longrightarrow)$ *Supposons que* $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$ *est séparé et* $x_{i_0}, y_{i_0} \in \mathbb{X}_{i_0}$ *tels que* $x_{i_0} \neq y_{i_0}$.

Pour tout $x' = (x_1, ..., x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, ..., x_n) \in \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \mathbb{X}_i$ *il existe un voisinage* O *de* $(x_1, ..., x_{i_0}, ..., x_n)$ *et un voisinage* O' *de* $(x_1, ..., y_{i_0}, ..., x_n)$ *tel que* $O \cap O' \neq \emptyset$, *mais* $O = V_1 \times V_2$ *et* $O' = V_1' \times V_2'$ *avec* $V_1 \in \mathcal{V}(x_{i_0})$, $V_2 \in \mathcal{V}(x')$, $V_1' \in \mathcal{V}(y_{i_0})$ *et* $V_2' \in \mathcal{V}(x')$ *d'où on obtient :*

$$O \cap O' = (V_1 \cap V_1') \times (V_2 \cap V_2') = \emptyset \Longrightarrow V_1 \cap V_1' = \emptyset,$$

et donc $\mathbb{X}_{i_0}$ *est séparé.*

$\Longleftarrow)$ *Soient* $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$ *tel que* $x \neq y$. *Alors, il existe au moins* $i_0 \in \{1, ..., n\}$ *tel que* $x_{i_0} \neq y_{i_0}$, *mais* $\mathbb{X}_{i_0}$ *est séparé donc il existe un voisinage* V *de* x_{i_0} *et un voisinage* W *de* y_{i_0} *tel que* $V \cap W = \emptyset$. *Soient* $O_x = \mathbb{X}_1 \times ... \times \mathbb{X}_{i_0-1} \times V \times \mathbb{X}_{i_0+1} ... \mathbb{X}_n$ *et* $O_y = \mathbb{X}_1 \times ... \times \mathbb{X}_{i_0-1} \times W \times \mathbb{X}_{i_0+1} ... \mathbb{X}_n$, *alors on obtient* $O_x \in \mathcal{V}(x)$, $O_y \in \mathcal{V}(y)$ *et* $O_x \cap O_y = \emptyset$ *et donc* $\mathbb{X}$ *est séparé.*

1.8 Suites convergentes

Définition 1.20. *On appelle " suite d'éléments " d'un ensemble* $\mathbb{X}$ *toute application de* $\mathbb{N}$ *(ou une partie de* $\mathbb{N}$*) dans* $\mathbb{X}$, *qui à l'entier* n *de* $\mathbb{N}$ *associe un élément de* $\mathbb{X}$ *noté* x_n. *La suite de terme général* x_n *est notée* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *(ou* (x_n)*).*

Définition 1.21. *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{X}$ *et* $l \in \mathbb{X}$. *On dit que* l *est une limite de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *(ou* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers une limite* l*) quand* n *tend vers l'infini si pour tout voisinage* V *de* l *dans* $\mathbb{X}$, *il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans* V. *Autrement dit,*

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \ \exists \ n_0(V) \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n \in V, \tag{1.17}$$

et on écrit :

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{Lim}\, x_n = l.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple 1.22.
1. *Toute suite constante est convergente dans tous les espaces topologiques.*
2. *Une suite d'un espace grossière est convergente vers tout point de cet espace.*
3. *Si* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace discret, alors une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{X}$ *converge vers* l *si et seulement s'il existe* n_0 *tel que* $x_n = l$ *quand* $n \geqslant n_0$.
4. *La suite* $(x_n) = \dfrac{1}{n}$ *est convergente vers* 0 *dans* $(\mathbb{R}, |.|)$ *et elle est divergente dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Proposition 1.35. *Si* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *est un espace topologique séparé, alors toute suite convergente dans* $\mathbb{X}$ *admet une limite unique.*

Preuve. *Raisonnons par l'absurde. Soit* (x_n) *une suite convergente dans* $\mathbb{X}$. *Supposons qu'elle admet deux limites distinctes* $l_1 \neq l_2$. *Comme* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *est séparé, il existe* $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ *et* $V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$ *tels que* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. *D'après la définition (1.21), il existe deux entiers* n_1 *et* n_2 *tels que :*

$$\forall n \geqslant n_1,\ x_n \in V_1 \ \text{et}\ \forall n \geqslant n_2,\ x_n \in V_2.$$

Soit $n_0 = max(n_1.n_2)$, *alors on obtient*

$$\forall n \geqslant n_0,\ x_n \in V_1 \cap V_2,$$

ce qui est impossible car $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Exemple 1.23. *La topologie grossière sur un ensemble* $\mathbb{X}$ *est une topologie non séparé car tout élément* $x \in \mathbb{X}$ *n'admet qu'un seul voisinage* $\mathbb{X}$. *Donc, si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite dans* $\mathbb{X}$, *tout point* $x \in \mathbb{X}$ *est une limite. Ainsi, il n'y a pas unicité de la limite.*

Définition 1.22. *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique. On dit que* $x \in \mathbb{X}$ *est une valeur d'adhérence de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{X}$ *si tout voisinage* V *de* x *contient une infinité de points de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.14. *D'après la définition précédente, on conclut que la limite d'une suite est une valeur d'adhérence de cette suite.*

Exemple 1.24.
1. *Dans* $(\mathbb{R}, |.|)$, $x = 1$ *est une valeur d'adhérence unique de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1 + e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et cette valeur est la limite de cette suite. De plus,* $x_n = 1 + e^{-n}$ *est un point adhérent pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *mais n'est pas une valeur d'adhérence.*

2. *Dans* $(\mathbb{R}, |.|)$, *la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède deux valeurs d'adhérence* -1 *et* 1, *mais elle est une suite divergente.*

D'après l'exemple précédent et la définition (1.22) on conclut que toute valeur d'adhérence est un point adhérent et la réciproque n'est pas vraie.

Proposition 1.36. *Si* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *est un espace topologique séparé, alors toute suite convergente dans* $\mathbb{X}$ *admet une unique valeur d'adhérence qui est sa limite.*

Preuve. *(Par des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de la proposition précédente.)*

Remarque 1.15. *Une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence diverge.*

La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par exemple, la suite définie par : $x_n = (1-(-1)^n) \times n$ ne possède que 0 comme valeur d'adhérence mais diverge.

Définition 1.23. *Soit* (x_n) *une suite d'un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. *On appelle sous-suite où suite extraite de* (x_n), *toute suite de la forme* $(x_{\phi(n)})$ *où* $\phi(n)$ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Exemple 1.25. *Si* (x_n) *une suite d'un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *et* $\phi(n) = 2n+1$, *alors* $(x_{2n+1}) = \{x_1, x_3, x_5, x_7, ..., x_{2n+1}, ...\}$ *est une sous-suite de* (x_n).

En utilisant les définitions (1.21) et (1.22) on obtient les deux résultats suivants.

Proposition 1.37.
1. *Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente (vers même limite).*
2. *La limite d'une suite extraite d'une suite* (x_n) *est une valeurs d'adhérence de cette dernière.*

Proposition 1.38. *Soit* $(z_n) = \left\{z_n^1, z_n^2, ..., z_n^k\right\}$ *une suite d'un espace* $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$. *Alors,* (z_n) *est convergente vers* $z = (z^1, z^2, ..., z^k)$ *si et seulement si pour tout* $i = 1, ..., k$ *la suite* (z_n^i) *est convergente dans* $\mathbb{X}$ *vers* z^i

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que* $(z_n) = \left\{z_n^1, z_n^2, ..., z_n^k\right\}$ *est convergente dans* $\mathbb{X}$ *vers* $z = (z^1, z^2, ..., z^k)$. *Soit* V_i *un voisinage de* z_i *dans* $\mathbb{X}_i$, $i = 1, ..., k$, *alors* $W = \mathbb{X}_1 \times ... \times \mathbb{X}_{i-1} \times V_i \times \mathbb{X}_{i+1} \times ... \times \mathbb{X}_k$ *est un voisinage de* z, *donc il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow z_n \in W.$$

Par conséquent on obtient :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow z_n^i \in V_i,$$

ce qui montre que pour tout $i = 1, ..., k$ *la suite* (z_n^i) *est convergente vers* z^i *dans* $\mathbb{X}_i$.

$\Longleftarrow$) *Supposons que pour tout* $i = 1, ..., k$ *la suite* (z_n^i) *est convergente vers* z^i *dans* $\mathbb{X}_i$. *Soit* W *un voisinage de* $z = (z^1, z^2, ..., z^k)$ *dans* $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$. *D'après la proposition (1.31),* W *contient un voisinage de la forme* $V_1 \times ... \times V_k$ *tel que* V_i *est un voisinage de* z^i *dans* $\mathbb{X}_i$ *pour tout* $i = 1, ..., k$. *Donc, pour tout* $i = 1, ..., k$ *et pour tout* $V_i \in \mathcal{V}(z^i)$ *il existe* n_0^i *tel que :*

$$n \geqslant n_0^i \Longrightarrow z_n^i \in V_i.$$

Si on pose $n_0 = max(n_0^1, ..., n_0^k)$ *on obtient :*

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow z_n \in V_1 \times ... \times V_k,$$

ce qui entraîne que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow z_n \in W.$$

Donc z_n *est une suite convergente vers* z *dans* $\mathbb{X}$.

Proposition 1.39. *Si* $x = (x^1, ..., x^k)$ *est une valeur d'adhérence de* (z_n) *dans* $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$, *alors* x^i *est une valeur d'adhérence de* (z_n^i) *pour tout* $i = 1, ..., k$.

Preuve. *Soit* $V_i \in \mathcal{V}(x^i)$ *pour tout* $i = 1, ..., k$, *alors* $W = \mathbb{X}_1 \times ... \times \mathbb{X}_{i-1} \times V_i \times \mathbb{X}_{i+1} \times ... \times \mathbb{X}_k$ *est un voisinage de* x *dans* $\mathbb{X}$. *Par conséquent on obtient :*

$$card \{n \in \mathbb{N} : z_n \in W\} = +\infty,$$

ce qui entraîne que :

$$card \left\{n \in \mathbb{N} : z_n^i \in V_i\right\} = +\infty,$$

d'où x^i *est une valeur d'adhérence de* (z_n^i) *pour tout* $i = 1, ..., k$.

Le résultat précédent est en général faux. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ si on prend la suite $z_n = (x_n, y_n)$ définie par la relation suivante :

$$\begin{cases} x_{2n} = n \\ x_{2n+1} = \dfrac{1}{n}. \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{2n} = \dfrac{1}{n} \\ x_{2n+1} = n. \end{cases}$$

Il est claire que 0 est une valeur d'adhérence de (x_n) et (y_n) mais $(0,0)$ n'est pas une valeur d'adhérence de (z_n).

1.9 Applications continues

Définition 1.24 (Continuité ponctuelle). *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *et* $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces topologiques. On dit qu'une application* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *est continue en* $x_0 \in \mathbb{X}$ *ssi pour* *tout voisinage* $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(f(x_0))$, *il existe* $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_0)$ *tel que* $f(U) \subset V$. *Autrement dit,*

$$\forall\ V \in \mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(f(x_0)),\ \exists U \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_0)/f(U) \subset V \Longleftrightarrow f \text{ est continue en } x_0. \tag{1.18}$$

En utilisant l'image réciproque on obtient $U \subset f^{-1}(V)$ d'où $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0. Donc, on peut écrire la définition précédente sous la forme suivante.

Définition 1.25. *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *et* $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces topologiques. On dit qu'une application* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *est continue en* $x_0 \in \mathbb{X}$ *si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de* $f(x_0)$ *dans* $\mathbb{Y}$ *est un voisinage de* x_0 *dans* $\mathbb{X}$. *Autrement dit,*

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(f(x_0)),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_0) \tag{1.19}$$

Remarque 1.16. *Dans les deux définitions précédentes on peut remplacer* $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_0)$ *et* $\mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(f(x_0))$ *par des* SFV *de* x_0 *et* $f(x_0)$.

Exemple 1.26.
1. *L'application* $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $f(x) = x$ *n'est pas continue sur* $\mathbb{R}$, *car* $V = \{x\}$ *est un voisinage de* x *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ *mais* $f^{-1}(V) = \{x\}$ *n'est pas un voisinage de* x *dans* $(\mathbb{R}, |.|)$.
2. *Soit* $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *et* $\mathcal{T}_{\mathbb{X}} = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}$ *et* $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ *et* $\mathcal{T}_{\mathbb{Y}} = \{\emptyset, \mathbb{Y}, \{y_1\}, \{y_1, y_2\}, \{y_1, y_2, y_3\}\}$. *On définie l'application* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *telle que* $f(x_4) = y_4$, $f(x_3) = y_2$, $f(x_1) = f(x_2) = y_1$.
   - *Par exemple, on a* $\mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(f(x_4)) = \mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(y_4) = \{\mathbb{Y}\}$ *et* $f^{-1}(\mathbb{Y}) = \mathbb{X} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_4)$ *d'où* f *est continue en* x_4.
   - *On a aussi,* $\mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(y_2) = \{\{y_1, y_2,\}, \{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_2, y_4\}, \mathbb{Y}\}$. *Si on prend* $V = \{y_1, y_2\}$ *on obtient* $f^{-1}(V) = \{x_1, x_2, x_3\} \notin \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_3)$, *donc* f *n'est pas continue en* x_3.

Proposition 1.40 (Transitivité de la continuité)). *Soit* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *et* $\mathbb{T}$ *trois espaces topologiques. On considère les deux fonctions* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *et* $g : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{T}$. *Si* f *est continue en un point* $x_0 \in \mathbb{X}$ *et* g *est continue en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est continue en* x_0.

Preuve. *Soit* $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{T}}(g \circ f(x_0))$. *Comme* g *est continue en* $f(x_0)$, *il existe* $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(f(x_0))$ *tel que* $g(V) \subset W$ *et comme* f *est continue en* x_0, *il existe* $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_0)$ *tel que* $f(U) \subset V$. *On en déduit que* $g \circ f(U) \subset W$ *d'où* $g \circ f$ *est continue en* x_0.

Remarque 1.17. *La réciproque dans la préposition précédente n'est pas toujours vraie.*
Considérons l'application f *figurée dans l'exemple (1.26(2)) et soit* $g : (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}}) \longrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *une application définie comme suit :* $g(y_4) = x_4$, $g(y_3) = x_1$, $g(y_2) = x_3$, $g(y_1) = x_2$. *D'une part, on a* $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(g(f(x_4))) = \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(g(y_4)) = \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_4) = \{\{x_2, x_3, x_4\}, \mathbb{X}\}$. *Mais,* $g^{-1}(\{x_2, x_3, x_4\}) = \{y_1, y_2, y_4\} \notin \mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(y_4)$, *ce qui signifie que* g *n'est pas continue en* $f(x_4) = y_4$. *D'autre part, on a* $(g \circ f)(x_4) = g(f(x_4)) = g(y_4) = x_4$

et $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_4) = \{\{x_2, x_3, x_4\}, \mathbb{X}\}$ *et* $(g \circ f)^{-1}(\{x_2, x_3, x_4\}) = f^{-1}(g^{-1}(\{x_2, x_3, x_4\})) = f^{-1}(\{y_1, y_2, y_4\}) = \mathbb{X} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_4)$ *et comme* $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$ *on conclut que* $g \circ f$ *est continue en* x_4.

Proposition 1.41. *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces topologiques et* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$. *Les assertions suivantes sont équivalente.*

- ***(a)*** f *est continue.*
- ***(b)*** $f(AdhA) \subset Adhf(A)$ *pour toute partie* A *de* $\mathbb{X}$.
- ***(c)*** $f^{-1}(F)$ *est fermé dans* $\mathbb{X}$ *pour tout fermé* F *de* $\mathbb{Y}$.
- ***(d)*** $f^{-1}(O)$ *est ouvert dans* $\mathbb{X}$ *pour tout ouvert* O *de* $\mathbb{Y}$.
- ***(e)*** $f^{-1}(\beta)$ *est ouvert dans* $\mathbb{X}$ *pour tout élément* β *d'une base* $\mathfrak{B}$ *de* $\mathcal{T}_{\mathbb{Y}}$.
- ***(f)*** $f^{-1}(IntB) \subset Intf^{-1}(B)$ *pour toute partie* B *de* $\mathbb{Y}$.
- ***(g)*** $Adhf^{-1}(B) \subset f^{-1}(AdhB)$ *pour toute partie* B *de* $\mathbb{Y}$.

Preuve. • ***(a)*** $\Longrightarrow$ ***(b)*** *Soit* $a \in Adh(A)$ *et* $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{Y}}(f(a))$, *alors* $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(a)$ *car* f *est continue. Par conséquent,* $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. *Donc, si* $y \in f^{-1}(V) \cap A$ *on obtient* $f(y) \in V \cap f(A)$ *c-à-d* $V \cap f(A) \neq \emptyset$ *d'où* $f(a) \in Adh(f(A))$ *ce qui montre que* $f(Adh(A)) \subset Adh(f(A))$.

• ***(b)*** $\Longrightarrow$ ***(c)*** *Soit* F *une partie fermé de* $\mathbb{Y}$. *On pose* $A = f^{-1}(F)$, *donc il suffit de montrer que* $A = Adh(A)$. *Par définition on a* $A \subseteq Adh(A)$ *et d'après* ***(b)*** *on a* $f(Adh(A)) \subseteq Adh(f(A)) \subseteq Adh(F) = F$ *(car* F *fermé), d'où* $Adh(A) \subseteq f^{-1}(F) = A$. *Par conséquent,* $A = Adh(A)$ *ce qui montre que* $f^{-1}(F)$ *est fermé dans* $\mathbb{X}$.

• ***(c)*** $\Longrightarrow$ ***(d)*** *Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{Y}$, *alors* $\complement_{\mathbb{Y}} O$ *est un fermé dans* $\mathbb{Y}$. *Donc, d'après* ***(c)*** *la partie* $f^{-1}(\complement_{\mathbb{Y}} O)$ *est fermée dans* $\mathbb{X}$ *et puisque* $f^{-1}(\complement_{\mathbb{Y}} O) = \complement_{\mathbb{X}} f^{-1}(O)$ *on déduit que* $f^{-1}(O)$ *est ouvert dans* $\mathbb{X}$.

• ***(d)*** $\Longrightarrow$ ***(e)*** *(Évident).*

• ***(e)*** $\Longrightarrow$ ***(f)*** *Soit* B *une partie de* $\mathbb{Y}$. *Alors,* $Int(B) = \bigcup_{i \in I} \beta_i$ *tel que* $\{\beta_i : i \in I\}$ *est une famille d'éléments d'une base* $\mathfrak{B}$ *de* $\mathcal{T}_{\mathbb{Y}}$. *En utilisant l'image réciproque on obtient* $f^{-1}(Int(B)) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} \beta_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\beta_i)$. *Ainsi,* $f^{-1}(Int(B))$ *est un ouvert dans* $\mathbb{X}$ *(d'après* ***(e)*** *) et puisque* $f^{-1}(Int(B)) \subset f^{-1}(B)$ *on conclut que* $f^{-1}(Int(B)) \subset Int(f^{-1}(B))$ *(voir la proposition (1.12)).*

• ***(f)*** $\Longrightarrow$ ***(g)***. *Soit* B *une partie de* $\mathbb{Y}$. *En utilisant la proposition (1.15(4)) et (f) on obtient :*

$$\begin{aligned} \complement_{\mathbb{X}} f^{-1}(AdhB) &= f^{-1}(\complement_{\mathbb{Y}} AdhB) = f^{-1}(Int\complement_{\mathbb{Y}} B) \\ &\subseteq Intf^{-1}(\complement_{\mathbb{Y}} B) = Int\complement_{\mathbb{X}} f^{-1}(B) = \complement_{\mathbb{X}} Adhf^{-1}(B), \end{aligned}$$

ce qui montre que $Adhf^{-1}(B) \subset f^{-1}(AdhB)$.

• ***(g)*** $\Longrightarrow$ ***(a)*** *Soit* $x_0 \in \mathbb{X}$ *et* O *un voisinage ouvert de* $f(x_0)$. *Alors,* $\complement_{\mathbb{Y}} O$ *est fermé dans* $\mathbb{Y}$. *En utilisant* ***(g)*** *on obtient* $Adhf^{-1}(\complement_{\mathbb{Y}} O) \subseteq f^{-1}(Adh\complement_{\mathbb{Y}} O) = f^{-1}(\complement_{\mathbb{Y}} O)$ *(car*

$\complement_{\mathbb{Y}} O$ *et fermé) et donc* $f^{-1}(\complement_{\mathbb{Y}} O) = \complement_{\mathbb{X}} f^{-1}(O)$ *est un fermé. Par conséquent,* $f^{-1}(O)$ *est ouvert dans* $\mathbb{X}$*. En fin, puisque* $x_0 \in f^{-1}(O)$ *on conclut que* $f^{-1}(O) \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_0)$ *ce qui montre que* f *est continue.*

Proposition 1.42. *Soit* $(A, \mathcal{T}_A)$ *un sous-espace d'un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$*. Alors l'injection canonique* $i : A \longrightarrow \mathbb{X}$ *définie par* $i(a) = a$ *pour tout* $a \in A$ *est continue.*

Preuve. *Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{X}$*, alors* $i^{-1}(O) = O \cap A$ *qui est ouvert dans* $(A, \mathcal{T}_A)$ *donc* i *est continue.*

Proposition 1.43. *Soient* $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ *une application continue et* $A \subset \mathbb{X}$*. Alors la restriction* $f_{|A} : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ *est continue.*

Preuve. *On a* $f_{|A} = f \circ i$*, donc* $f_{|A}$ *est continue car c'est la composée de deux fonctions continues.*

Proposition 1.44. *Soient* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$*,* $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces topologiques. Si* $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ *continue et injective et* $\mathbb{Y}$ *séparé, alors* $\mathbb{X}$ *est séparé.*

Preuve. *Soient* $x, y \in \mathbb{X}$ *tels que* $x \neq y$*, alors* $f(x) \neq f(y)$ *(car* f *est injective) et puisque* $\mathbb{Y}$ *est séparé, il existe deux ouverts disjoints* O_1 *et* O_2 *tels que* $f(x) \in O_1$ *et* $f(y) \in O_2$*. Par conséquent,* $f^{-1}(O_1)$ *et* $f^{-1}(O_2)$ *sont deux ouverts disjoints tels que* $x \in f^{-1}(O_1)$ *et* $y \in f^{-1}(O_2)$ *ce qui montre que* $\mathbb{X}$ *est séparé.*

Définition 1.26 (Continuité séquentielle). *Soient* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$*,* $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces topologiques, On dit que* f *est séquentiellement continue en* x_0 *si pour toute suite* (x_n) *qui converge vers* x_0*, la suite* $f(x_n)$ *converge vers* $f(x_0)$*.*

Remarque 1.18. *On dit que* f *est continue (resp. séquentiellement continue) sur* $\mathbb{X}$ *si elle est continue (resp. séquentiellement continue) en tout point de* $\mathbb{X}$*.*

Proposition 1.45. *Toute application continue est séquentiellement continue.*

Preuve. *Soit* f *une fonction continue en* x_0 *et* (x_n) *une suite convergente vers* x_0*. Donc, si* V *est un voisinage de* $f(x_0)$ *alors* $f^{-1}(V)$ *est un voisinage de* x_0 *d'où il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n \in f^{-1}(V),$$

ou, de manière équivalente

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow f(x_n) \in V,$$

ce qui montre que $\underset{n \longrightarrow \infty}{Lim} f(x_n) = f(x_0)$*.*

Remarque 1.19. *La réciproque dans la proposition précédente n'est pas vraie en général.*

1.10 Applications ouvertes, Applications fermées

Soit $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ une fonction continue.

• Si O est un ouvert de $\mathbb{X}$ alors $f(O)$ n'est pas nécessairement ouvert dans $\mathbb{Y}$.

• Si F est un fermé de $\mathbb{X}$ alors $f(F)$ n'est pas nécessairement fermé dans $\mathbb{Y}$.

Autrement dit, l'image continue d'un ouvert (resp. fermé) n'est pas nécessairement un ouvert(resp. fermé).

Exemple 1.27. *1. La fonction $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $f(x) = sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.*

2. La fonction $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $f(x) = e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Définition 1.27. *Soit $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$. On dit que f est une application ouverte(resp. fermée) si l'image directe de tout ouvert (resp. fermé) de X est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{Y}$.*

Exemple 1.28. *1. Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ un espace topologique et $A \subset \mathbb{X}$. L'application canonique $i : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ définie par $i(x) = x$ est ouverte(resp. fermée) si A est un ouvert de $\mathbb{X}$.*

2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = c \in \mathbb{R}$. Si F est fermé dans $\mathbb{R}$ alors $f(F) = \{c\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ aussi. Par contre, si O est ouvert dans $\mathbb{R}$ alors $f(O) = \{c\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. Donc, $f(x) = c$ est une application continue et fermée mais n'est pas ouverte.

Proposition 1.46. *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ deux espaces topologiques et $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$. Alors, pour tout $A \in \mathbb{X}$ on a :*

(1) *f est ouvert $\Longleftrightarrow f(IntA) \subset Int(f(A))$.*

(2) *f est fermé $\Longleftrightarrow Adhf(A) \subset f(AdhA)$.*

Preuve. ***(1)***

$\Longrightarrow$) *Supposons que f est ouvert, donc $f(Int(A))$ est ouvert dans $\mathbb{Y}$. Par conséquent $f(IntA) \subset Int(f(A))$(car $Int(A) \subset A$).*

$\Longleftarrow$) *Supposons que $f(IntA) \subset Int(f(A))$ et soit A un ouvert de $\mathbb{X}$, alors $f(A) = f(IntA) \subset Intf(A)$ et donc $f(A) = Intf(A)$ ce qui montre que f est ouvert.*

(2) *(Exercice : en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans **(1)**).*

Proposition 1.47. *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ deux espaces topologiques et $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$. Alors, pour tout $A \in \mathbb{X}$ et $B \in \mathbb{Y}$ on a :*

(1) *f continue et ouverte $\Longleftrightarrow f^{-1}(IntB) = Int(f^{-1}(B))$.*

(2) *f continue et fermée $\Longleftrightarrow Adhf(A) = f(AdhA)$.*

Preuve. ***(1)***

$\Longrightarrow$) *Supposons que f est ouvert et continue. Donc, on obtient*

$$(*) \qquad f^{-1}(IntB) \subset Intf^{-1}(B),$$

d'après la proposition (1.41(f)). D'autre part, puisque $Intf^{-1}(B)$ est un ouvert dans $\mathbb{X}$ alors $f(Intf^{-1}(B))$ est ouvert dans $\mathbb{Y}$ (car f ouvert). Par conséquent $f(Intf^{-1}(B)) \subset Intf(f^{-1}(B)) \subset IntB$ d'où

$$(**) \qquad Int(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(IntB).$$

. En fin, les deux inclusions $(*)$ et $(**)$ montrent que $f^{-1}(IntB) = Int(f^{-1}(B))$.

$\Longleftarrow$) *Supposons que $f^{-1}(IntB) = Int(f^{-1}(B))$, donc f est continue (voir la proposition 1.41(f)). De plus, si A un ouvert de $\mathbb{X}$ on obtient*

$$A = IntA \subset Intf^{-1}(f(A)) = f^{-1}(Intf(A)),$$

et donc $f(A) \subset Intf(A)$. Ainsi, $f(A)$ est ouvert d'où f est ouvert.

(2) *(Évidente, en utilisant la proposition (1.41(b)) et la proposition (1.46(**2**))).*

1.11 Homéomorphismes

Définition 1.28. *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ deux espaces topologiques et $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$. On dit que f est un homéomorphisme de $\mathbb{X}$ sur $\mathbb{Y}$ si :*

(1) *f est bijective,*

(2) *f est continue de $\mathbb{X}$ sur $\mathbb{Y}$,*

(3) *f^{-1} est continue de $\mathbb{Y}$ sur $\mathbb{X}$,*

S'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{X}$ sur $\mathbb{Y}$, on dit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont homéomorphes ou bien topologiquement équivalents et on le note par $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$. Toute propriété conservée par un homéomorphisme est dite propriété topologique.

Exemple 1.29.

1. *Soit $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{Y} =]-1,1[$ munis de la topologie usuelle. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme. Par conséquent, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont homéomorphe.*
2. *Soit $\mathbb{X} =]a,b[$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ munis de la topologie usuelle. La fonction $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}$ est un homéomorphisme. Par conséquent, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont homéomorphe.*
3. *Soit $\mathbb{X} =]a,b[$ et $\mathbb{Y} =]0,1[$ munis de la topologie usuelle. La fonction $f :]0,1[\longrightarrow]a,b[$ définie par $f(x) = (b-a)x + a$ est un homéomorphisme. Par conséquent, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont homéomorphe.*

Remarque 1.20. 1. *En général, la bijectivité et la continuité de f ne signifie pas que f est un homéomorphisme. Par exemple, l'application $f : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $f(x) = x$ est bijective et continue, tandis que f^{-1} n'est pas continue.*

2. *Les homéomorphismes sont des applications ouvertes et fermées par définition.*

CHAPITRE 2

ESPACES MÉTRIQUES

2.1 Distance, Espace métrique

Définition 2.1. *(Espace métrique) Soit* $\mathbb{X}$ *un ensemble quelconque et* $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction qui vérifie les trois conditions suivantes pour tout* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *:*

$C_1)$ $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ *; (propriété de séparation).*

$C_2)$ $d(x,y)=d(y,x)$ *; (propriété de symétrie).*

$C_3)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *; (inégalité triangulaire).*

La fonction d *est appelée distance(ou métrique) et le couple* $(\mathbb{X}, d)$ *est appelé espace métrique.*

Exemple 2.1. 1. *Sur* $\mathbb{R}^n$ *on a les distances suivantes :*

(a) $d_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, ***(b)*** $d_2(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

(c) $d_\infty(x,y) = \sup\limits_{i=1,\ldots,n} (|x_i - y_i|)$, ***(d)*** $d_p(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$

2. *Sur* $C([a,b](), \mathbb{R})$*(l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermée* $[a,b]$*) on a les distances suivantes :*

(a) $d_1(f,g) = \int\limits_a^b |f(t) - g(t)| dt$, ***(b)*** $d_2(f,g) = [\int\limits_a^b (f(t) - g(t))^2 dt]^{\frac{1}{2}}$,

(c) $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{t \in [a,b]} (|f(t) - g(t)|)$, ***(d)*** $d_p(f,g) = [\int\limits_a^b |f(t) - g(t)|^p dt]^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$

La distance d_2 *est appelée la distance euclidienne,* d_∞ *est appelée la distance de la convergence uniforme et* d_p *est appelée la distance de Holder.*

Exemple 2.2. *L'application* $d_u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par* $d(x,y) = |x - y|$ *est une distance sur* $\mathbb{R}$ *et est appelée la distance usuelle de* $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3. *Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque. La distance δ définie par :*

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 \ si \ x \neq y \\ 0 \ si \ x = y \end{cases} \tag{2.1}$$

est appelée la distance discrète. L'espace métrique muni de cette distance est appelé espace métrique discret.

Proposition 2.1. *Soit $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique. Alors, pour tout $x,y,z \in \mathbb{X}$ on a :*

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leqslant d(x,y). \tag{2.2}$$

Preuve. *En utilisant la condition (C_1) on obtient :*

$$d(x,z) - d(y,z) \leqslant d(x,y). \tag{$*$}$$

D'autre part on a :

$$-d(x,y) \leqslant d(x,z) - d(y,z). \tag{$**$}$$

D'après $(*)$ et $(**)$ l'inégalité (2.2) est vérifiée.

Définition 2.2. *Soit A une partie non-vide d'un espace métrique $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$. La restriction $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de $d_{\mathbb{X}}$ sur A, c-à-d : $d_A(x,y) = d_{\mathbb{X}}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in A \times A$, est une distance sur A. La distance d_A est appelée la distance induite et (A,d_A) est appelé sous-espace métrique de $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$.*

2.2 Boule ouverte, Boule fermée

Définition 2.3. *Soient $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique, $a \in \mathbb{X}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.*

1) *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble défini par :*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{X} \ / \ d(a,x) < r\}.$$

2) *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble défini par :*

$$B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{X} \ / \ d(a,x) \leq r\}.$$

3) *On appelle Sphère de centre a et de rayon r l'ensemble défini par :*

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{X} \ / \ d(a,x) = r\}.$$

Exemple 2.4. ***1)*** *Dans $\mathbb{R}$ les distances d_1, d_2 et d_∞ sont égaux et on a :*

- $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-a| < r\} =]a-r, a+r[$.

- $B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-a| \leq r\} = [a-r, a+r]$.
- $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-a| = r\} = \{a-r, a+r\}$.

2) *Dans $\mathbb{R}^2$, si $d = d_2$ alors :*

- *$B(a,r)$ est l'ensemble des points strictement a l'intérieur du disque de centre a et de rayon r,*
- *$S(a,r)$ est le cercle de centre a et de rayon r.*
- *$B_f(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$.*

3) *Dans $\mathbb{R}^3$, si $d = d_2$ alors :*

- *$B(a,r)$ est l'ensemble des points strictement a l'intérieur de la sphère de centre a et de rayon r.*
- *$S(a,r)$ est la sphère de centre a et de rayon r.*
- *$B_f(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$.*

4) *Dans $\mathbb{R}^2$, on a :*

- $B_{d_1}((0,0),1) = \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ d_1\left((x_1,x_2),(0,0)\right) = |x_1| + |x_2| < 1\Big\}$,
- $B_{d_2}((0,0),1) = \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ d_2\left((x_1,x_2),(0,0)\right) = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} < 1\Big\}$,
- $B_{d_\infty}((0,0),1) = \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ d_\infty\left((x_1,x_2),(0,0)\right) = max(|x_1|,|x_2|) < 1\Big\}$.

Donc, pour les distances d_1, d_2 et d_∞ la boule unitaire $B_f((0,0),1)$prend les formes suivantes :

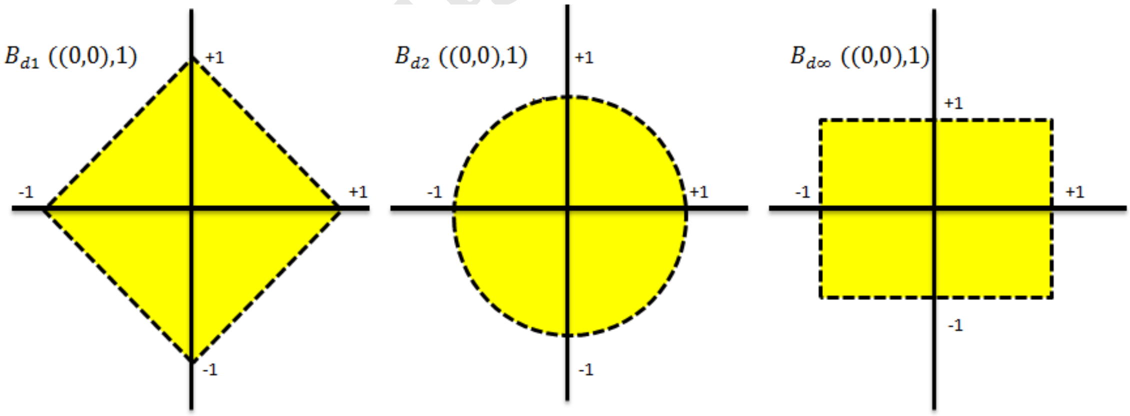

FIGURE 2.1 – Boules ouvertes $B\left((0,0),1\right)$ dans $\mathbb{R}^2$ avec d_1, d_2 et d_∞

5) *Si on prend l'espace topologique $(\mathbb{X}, \delta)$ (voir l'exemple (2.3)), alors pour tout $a \in \mathbb{X}$ et $r > 0$ on a :*

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\} & si \ r \leq 1, \\ \mathbb{X} & si \ r > 1. \end{cases}$$

2.3 Partie ouverte, Partie fermée, Voisinage, Topologie associée à une distance

Définition 2.4. *Soient* $(\mathbb{X},d)$ *un espace métrique et* O,F,V_x *des parties de* $\mathbb{X}$.

1) *(*O *est ouvert dans* $\mathbb{X}$ *)* $\Longleftrightarrow$ *(*$O=\emptyset$*) ou (*$\forall\, x\in O,\ \ \exists\, r>0$ *tel que* $B(x,r)\subseteq O$*).*

2) *(*F *est fermé dans* $\mathbb{X}$ *)* $\Longleftrightarrow$ *(* $\complement_{\mathbb{X}}F$ *est ouvert dans* $\mathbb{X}$*).*

3) *(*V_x *est un voisinage de* x *)* $\Longleftrightarrow$ *(* $\exists\, r>0$ *tel que* $B(x,r)\subseteq V_x$*).*

Proposition 2.2. *Une boule ouverte est une partie ouverte.*

Preuve. *Soit* $B(a,r_1)$ *une boule ouverte de* $\mathbb{X}$. *Alors, pour tout* $x\in B(a,r_1)$ *on a* $d(a,x)<r_1$. *En posant* $r_2=r_1-d(a,x)$ *on obtient :* $B(x,r_2)\subset B(a,r_1)$.

Remarque 2.1. *D'après la proposition précédente, une boule fermée est une partie fermée.*

Proposition 2.3. *Dans un espace métrique, toute partie ouverte est une réunion de boules ouvertes.*

Preuve. *Soit* O *un ouvert de* $(\mathbb{X},d)$. *Alors pour tout* $x\in O$ *il existe* $r>0$ *tel que* $B(x,r)\subseteq O$ *ce qui implique que* $O=\bigcup\limits_{x\in O}\{x\}\subseteq\bigcup\limits_{x\in O}B(x,r)\subseteq O$ *d'où* $O=\bigcup\limits_{x\in O}B(x,r)$.

Proposition 2.4. *Soit* $\mathcal{T}$ *la famille des ouverts dans un espace métrique* $(\mathbb{X},d)$. *Alors,* $\mathcal{T}$ *est une topologie sur* $\mathbb{X}$ *telle que la famille des boules ouvertes est une base de cette topologie.*

Preuve. C_1) $\mathbb{X},\emptyset\in\mathcal{T}$ *(Évidente).*

C_2) *Soit* $\{O_i : i\in I\}$ *une famille de* $\mathcal{T}$. *Alors, pour tout* $x\in\bigcup\limits_{i\in I}O_i$, *il existe* $i_0\in I$ *tel que* $x\in O_{i_0}$ *ce qui implique qu'il existe* $r>0$ *tel que* $B(x,r)\subseteq O_{i_0}$ *d'où* $B(x,r)\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}O_i$ *ce qui montre que* $\bigcup\limits_{i\in I}O_i\in\mathcal{T}$.

C_3) *Soient* $O_1,O_2\in\mathcal{T}$. *Alors, on a :*

$$x\in O_1\cap O_2\Longrightarrow\exists r_1>0 \text{ et } r_2>0\ /\ B(x,r_1)\subseteq O_1 \text{ et } B(x,r_2)\subseteq O_2.$$

En posant $r=min(r_1,r_2)$ *on obtient :*

$$B(x,r)\subseteq B(x,r_1)\cap B(x,r_2)\subseteq O_1\cap O_2,$$

ce qui montre que $O_1\cap O_2\in\mathcal{T}$ *et donc* $\mathcal{T}$ *et une topologie sur* $\mathbb{X}$.

En fin, la proposition (2.3) montre que la famille des boules ouvertes est une base de cette topologie.

Proposition 2.5. *La sphère* $S(x,r)$ *est un fermé de* $(\mathbb{X},d)$.

Preuve. *Le complément de $S(x,r)$ est l'union $\complement_{\mathbb{X}} B_f(x,r) \cup B(x,r)$ qui est un ouvert car c'est l'union de deux ouverts. Donc la sphère est un fermé.*

Remarque 2.2. *Puisque tout espace métrique est un espace topologique, alors les notions et les définitions qu'on a vu dans le premier chapitre restent valable pour ce chapitre sauf la définition d'un ouvert qu'on a remplacé par la définition (2.4)(1).*

Les proposition suivantes récapitulent quelques notions et définitions citées dans le premier chapitre.

Proposition 2.6. *Soient $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique, $x \in \mathbb{X}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.*

1) *$\mathbb{X}$ et $\emptyset$ sont des ouverts et fermés à la fois de $(\mathbb{X},d)$.*

2) *Toute union arbitraire d'ouverts de $(\mathbb{X},d)$ est un ouvert de $(\mathbb{X},d)$.*

3) *Toute intersection finie d'ouverts de $(\mathbb{X},d)$ est un ouvert de $(\mathbb{X},d)$.*

4) *Toute intersection arbitraire fermés de $(\mathbb{X},d)$ est un fermés de $(\mathbb{X},d)$.*

5) *Toute union finie de fermés de $(\mathbb{X},d)$ est un fermé de $(\mathbb{X},d)$.*

6) *Toute partie finie de $(\mathbb{X},d)$ est un fermé de $(\mathbb{X},d)$.*

Preuve. *(Exercice.)*

Proposition 2.7. *Soient $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique, $x \in \mathbb{X}$*

1) *Toute boule ouverte est un voisinages de tous ses points.*

2) *La réunion quelconque de voisinages de x est un voisinage de x.*

3) *L'intersection finie de voisinages de x est un voisinages de x.*

4) *X est un voisinage de tout $x \in \mathbb{X}$.*

Proposition 2.8 (Séparation)**.** *Soient x,y deux éléments distincts d'un espace métrique $(\mathbb{X},d)$, alors il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.*

Preuve. *Puisque $x \neq y$, alors $d(x,y) = r > 0$. Si on prend $V = B(x, \frac{r}{3})$ et $W = B(y, \frac{r}{3})$ on obtient $V \cap W = \emptyset$ et donc $\mathbb{X}$ est séparé (**Hausdorff**).*

Remarque 2.3. *D'après la proposition précédente on conclut que tout espace métrique est séparé (**Hausdorff**).*

2.4 Intérieur, extérieur, adhérence et frontière

Définition 2.5. *Soit $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique et $A \subset \mathbb{X}$.*

1) $x \in Int(A) \Longleftrightarrow \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A.$

2) $x \in Ext(A) \Longleftrightarrow \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq \complement_{\mathbb{R}} A.$

3) $x \in Adh(A) \Longleftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset.$

4) $x \in A' \Longleftrightarrow \forall r > 0,\ (B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$

5) $x \in Is(A) \Longleftrightarrow \exists r > 0,\ B(x,r) \cap A = \{x\}.$

6) $Fr(A) = Adh(A) \cap Adh(\complement_{\mathbb{X}} A)$

Remarque 2.4. *Les propriétés de ces points qu'on a vu dans le premier chapitre restent valable dans ce chapitre.*

2.5 Distance entre deux parties, Diamètre

Définition 2.6. *Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique. Pour tout $A, B \subset \mathbb{X}$ la quantité positive définie par :*

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y), \tag{2.3}$$

est appelée distance entre A et B.
Si $A = \{a\}$ on écrit $d(a,B) = \inf_{y \in B} d(a,y)$ et on dit que $d(a,B)$ est la distance du point a à l'ensemble B.

Remarque 2.5. ***1)*** *D'après la définition précédente on a $d(A,B) = d(B,A)$.*

2) *$d(A,B)$ n'est pas une distance sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ des partie de $\mathbb{X}$. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |.|)$ si $A = [-2,4]$ et $B = [4,6]$ alors on a $d(A,B) = 0$ mais $A \neq B$.*

3) *$\forall A, B \subset \mathbb{X},\ A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow d(A,B) = 0$. La réciproque de l'implication précédente n'est pas toujours vraie. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |.|)$ si $A = \left\{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $B = \{1\}$ alors on a $d(A,B) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} |1 - \frac{n+1}{n}| = 0$ mais $A \cap B = \emptyset$.*

Proposition 2.9. *Soient A une partie d'un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ et $x \in \mathbb{X}$, alors on a :*

1) $$x \in Adh(A) \Longleftrightarrow d(x,A) = 0.$$

2) $$x \in Ext(A) \Longleftrightarrow d(x,A) > 0.$$

Preuve. ***1)***

$\Longrightarrow$) $x \in Adh(A) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ d(x,A) < \varepsilon \Longrightarrow d(x,A) = 0.$

$\Longleftarrow$) *(Par négation) Supposons que $x \notin Adh(A)$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \emptyset$ d'où on obtient :*

$$\forall y \in A,\ d(x,y) \geqslant r,$$

ce qui montre que :

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} (x,y) \geqslant r > 0.$$

2) *Par négation de **1)**.*

Définition 2.7. *Soit A une partie d'un espace métrique $(\mathbb{X},d)$. On dit que A est bornée si il existe une boule $B(x,r)$ de centre x et de rayon $r>0$ telle que $A\subset B(x,r)$*

Remarque 2.6. *D'après la définition précédente on conclut que les boules finies et les parties finies sont bornées.*

Définition 2.8. *On appelle diamètre d'une partie A de $\mathbb{X}$ qu'on le note par $diam(A)$ la quantité suivante :*

$$diam(A)=\sup_{x,y\in A} d(x,y). \tag{2.4}$$

Proposition 2.10. *Une partie A d'un espace métrique $(\mathbb{X},d)$ est bornée si et seulement si $diam(A)<\infty$.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que A est bornée, alors il existe $r>0$ tel que $A\subseteq B(x,r)$ d'où on obtient : $diam(A)\leqslant 2r<+\infty$.*

$\Longleftarrow$) *Supposons que $diam(A)<+\infty$, alors pour tout $x\in A$ on a $A\subset B(x,diam(A))$ ce qui montre que A est bornée.*

2.6 Métriques équivalentes

Définition 2.9. *Soient d et d' deux métrique définies sur un ensemble $\mathbb{X}$. On dit que d et d' sont équivalentes si et seulement si toute boules ouvertes pour chacune des métriques contient une boule ouverte pour l'autre et ce pour tout $x\in\mathbb{X}$. Autrement dit, l'application $Id_{\mathbb{X}}:(\mathbb{X},d)\longrightarrow(\mathbb{X},d')$ est un homéomorphisme.*

Définition 2.10. *Soient d et d' deux métrique définies sur un ensemble $\mathbb{X}$. On dit que d et d' sont équivalentes si et seulement si elles induisent la même topologie sur $\mathbb{X}$, c'est-à-dire si et seulement si les boules ouvertes pour d et les boules ouvertes pour d' sont des bases de la même topologie sur $\mathbb{X}$.*

Remarque 2.7. *La relation " d est équivalente à d' " est une relation d'équivalence dans toute famille de distances définies sur un ensemble $\mathbb{X}$.*

Proposition 2.11. *Soient d et d' deux métrique définies sur un ensemble $\mathbb{X}$. On dit que d et d' sont équivalentes(où Lipschitz-équivalentes) si il existe $k_1,k_2\in\mathbb{R}_+^*$ tels que :*

$$k_1 d'\leqslant d\leqslant k_2 d'. \tag{2.5}$$

Preuve. *Soit $x\in\mathbb{X}$ et $r>0$. Alors, on a :*

$$B_{d'}(x,\frac{r}{k_2})\subset B_d(x,r)\subset B_{d'}(x,\frac{r}{k_1}).$$

Exemple 2.5. *Les distances* d_1, d_2 *et* d_∞ *définies sur* $\mathbb{R}^2$ *(voir Exemple(2.1)) sont équivalentes puisque :* ***1)*** $d_\infty \leqslant d_1 \leqslant n.d_\infty$, ***2)*** $d_\infty \leqslant d_2 \leqslant \sqrt{n}.d_\infty$, ***3)*** $d_2 \leqslant d_1 \leqslant n.d_2$.

Remarque 2.8. *La réciproque dans la proposition précédente n'est pas toujours vraie.*

2.7 Produits d'espaces métriques

Définition 2.11. *Soient* $\{(\mathbb{X}_i, d_i) : \; i = 1, ..., n\}$ *une famille d'espaces métriques et* $x, y \in \mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$. *Alors, les quantités suivantes :*

$$\begin{aligned} \textbf{1)}\; D_1(x,y) &= (\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i))^{\frac{1}{2}}, \\ \textbf{2)}\; D_2(x,y) &= \sup_{i=1,\dots,n} d_i(x_i, y_i), \\ \textbf{3)}\; D_3(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i), \end{aligned}$$

sont des distances sur $\mathbb{X}$.

Remarque 2.9. *Les trois distance produit précédentes sont équivalentes car* $D_2 \leqslant D_1 \leqslant D_3 \leqslant \sqrt{n} D_1 \leqslant n D_2$.

Proposition 2.12.

1) *Si* O_i *est un ouvert dans* $\mathbb{X}_i$, $i = 1, ..., n$, *alors* $\prod_{i=1}^{n} O_i$ *est ouvert dans* $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$.

2) *Si* F_i *est un fermé dans* $\mathbb{X}_i$, $i = 1, ..., n$, *alors* $\prod_{i=1}^{n} F_i$ *est fermé dans* $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$.

3) *Si* O *est un ouvert dans* $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$, $i = 1, ..., n$, *alors il existe* $r > 0$ *tel que* $\prod_{i=1}^{n} B(x_i, r) \subset O$.

Exemple 2.6. *Puisque* $\mathbb{R},]x, y[,]-\infty, z[$ *sont des ouverts dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\mathbb{R}^2$, $]x, y[\times \mathbb{R}$, $]x, y[\times]-\infty, z[$ *sont des ouvert dans* $\mathbb{R}^2$.

2.8 Espaces métriques isométriques

Définition 2.12. *Un espace métrique* $(\mathbb{X}, d_\mathbb{X})$ *est isométrique à l'espace métrique* $(\mathbb{Y}, d_\mathbb{Y})$ *si et seulement si il existe une bijection* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *qui conserve les distances. Autrement dit,*

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, \; d_\mathbb{Y}(f(x), f(y)) = d_\mathbb{X}(x, y). \tag{2.6}$$

Proposition 2.13. *Soient* $(\mathbb{X}, d_\mathbb{X})$ *et* $(\mathbb{Y}, d_\mathbb{Y})$ *deux espaces métriques. Si* $(\mathbb{X}, d_\mathbb{X})$ *et* $(\mathbb{Y}, d_\mathbb{Y})$ *sont isométriques, alors* $(\mathbb{X}, d_\mathbb{X})$ *et* $(\mathbb{Y}, d_\mathbb{Y})$ *sont également homéomorphes.*

Exemple 2.7. *L'application* $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ *définie par* $f(x) = x \pm b,\ b \in \mathbb{R}$ *est un isométrique.*

Remarque 2.10. *La réciproque dans la proposition précédente n'est pas vraie.*

Exemple 2.8. *Soient* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *et* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *sont deux espaces métriques tels que* $card(\mathbb{X}) = card(\mathbb{Y})$, $d_{\mathbb{X}} = \delta$ *(la distance discrète, voir l'exemple 2.3) et* $d_{\mathbb{Y}}(x,y) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$ *Alors,* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *et* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *ne sont pas isométriques car la distance entre deux points dans chaque espace sont différent. Mais, comme on a vu* $d_{\mathbb{X}}$ *et* $d_{\mathbb{Y}}$ *induisent la topologie discrète et deux espaces dicrets de même cardinal sont homéomorphe.*

2.9 Continuité dans les espaces métriques

2.9.1 Application continue

Définition 2.13. *Soient* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces métriques et* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$. *On dit que* f *est continue* x_0 *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha(\varepsilon, x_0) > 0\ /\ \forall x \in \mathbb{X},\ d_{\mathbb{X}}(x, x_0) < \alpha \Longrightarrow d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \tag{2.7}$$

et on dit que f *est continue sur une partie non vide de* $\mathbb{X}$ *si elle est continue en tout point* x_0 *de cette partie.*

Remarque 2.11. *En posant* $U = B(x_0, \alpha)$ *et* $V = B(f(x_0), \varepsilon))$ *on obtient la définition (1.24).*

Exemple 2.9. *Soit* $(\mathbb{X}, d)$ *un espace métrique. Toute application* $f_a : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par* $f_a(x) = d(a, x)$, *tel que* $a \in \mathbb{X}$, *est continue sur* $\mathbb{X}$ *car* $|f_a(x) - f_a(y)| = |d(a,x) - d(a,y)| \leqslant d(x,y)$ *(voir proposition (2.1)) ce qui montre que (2.7) est vérifiée pour* $\alpha = \varepsilon$.

Exemple 2.10. *Soient* d_u *et* δ *la topologie usuelle et la topologie discrète sur* $\mathbb{X}$, *respectivement. Alors, l'application* $f : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \delta)$ *définie par* $f(x) = x$ *n'est pas continue sur* $\mathbb{R}$ *car si* $x \neq x_0$ *et* $\varepsilon < 1$ *on obtient* $\delta(f(x), f(x_0)) = \delta(x, x_0) = 1$ *et donc (2.7) n'est pas vérifiée.*

2.9.2 Application uniformément continue

Définition 2.14. *Soient* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces métriques et* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$. *On dit que* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{X}$ *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha(\varepsilon) > 0\ /\ \forall x, y \in \mathbb{X},\ d_{\mathbb{X}}(x, y) < \alpha \Longrightarrow d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Exemple 2.11. *L'application* $f:(\mathbb{R},|.|)\longrightarrow(\mathbb{R},|.|)$ *définie par* $f(x)=x$ *est uniformément continue(il suffit de prendre* $\alpha=\varepsilon$*).*

Exemple 2.12. *L'application* $f:(\mathbb{R},|.|)\longrightarrow(\mathbb{R},|.|)$ *définie par* $f(x)=x^2$ *est continue mais n'est pas uniformément continue car pour tout* $r>0$ *si on pose* $x=n\in\mathbb{N}$ *et* $y=n+\frac{r}{2}$ *on obtient* $|x-y|=\frac{r}{2}<r$ *et* $|f(x)-f(y)|=\frac{r^2}{4}+nr>nr$*.*

En utilisant la définition précédente on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.14. *Toute application uniformément continue est continue.*

2.9.3 Application Lipschitzienne

Définition 2.15. *Soient* $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ *et* $(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces métriques et* $k\in\mathbb{R}_+^*$*. On dit que* $f:\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{Y}$ *est k-lipschitzienne si,*

$$\forall x,y\in\mathbb{X},\ d_{\mathbb{Y}}(f(x),f(y))\leqslant kd_{\mathbb{X}}(x,y), \tag{2.9}$$

et pour $0<k<1$ *on dit que* f *est contractante.*

Proposition 2.15. *Si* $I\subseteq\mathbb{R}$ *et* $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction dérivable telle que* $|f'|\leqslant k$ *pour tout* $x\in I$*, alors* f *est k-lipschitzienne. De plus, si* $|f'|\leqslant k<1$ *alors* f *est une contraction.*

Preuve. *On a :*

$$|f(x)-f(y)|=|\int_x^y f'(t)dt|\leqslant k|x-y|,$$

et donc f *est k-Lipschitzienne. De plus, si* $|f'|\leqslant k<1$ *alors* f *est une contraction.*

En utilisant la définition précédente on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.16. *Toute application k-lipschitzienne ou contractante est uniformément continue.*

Remarque 2.12. *Tout isométrique est uniformément continue (car est une application 1-lipschitzienne).*

CHAPITRE 3

ESPACES COMPLETS

3.1 Les suites dans un espace métrique

3.1.1 Suite convergente

Définition 3.1. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points d'un espace métrique $(\mathbb{X},d)$ est dite convergente vers $x_0 \in \mathbb{X}$ quand n tend vers l'infini si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n,x_0) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

et on écrit $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(x_n) = x_0$.

Remarque 3.1. *La condition (3.1) signifie qu'à partir d'un certain rang N les éléments de la suite (x_n) sont dans la boule ouverte $B(x_0,\varepsilon)$. Donc, cette boule contient une infinité d'éléments de cette suite.*

Exemple 3.1.

1. *Dans l'espace $(\mathbb{R},|.|)$, la suite $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et on écrit $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right) = 1$.*
2. *Si $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ deux espaces métriques, alors toute suite $((x_n,y_n))_n$ de l'espace produit $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y},d)$ tel que d est l'une des distances de la définition (2.11) est convergente vers (x,y) ssi $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$.*

Proposition 3.1. *Soit F une partie d'un espace métrique $(\mathbb{X},d)$ et $\mathcal{L}$ l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes dans F . Alors, F est fermée si et seulement si $F=\mathcal{L}$.*

Preuve. $\Longrightarrow$ *) Supposons que F est fermée.*

• $\mathcal{L}\subseteq F$?) *Soit $x\in\mathcal{L}$, c-à-d. x est une limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F. Si $x\notin F$, alors $x\in\complement_{\mathbb{X}}F$ (un ouvert) et donc il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\subseteq\complement_{\mathbb{X}}F$ et*

puisque $x_n \longrightarrow x$*, alors il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n \geqslant N \Longrightarrow d(x_n,x) < r$ *c'est-à-dire* $x_n \in B(x,r) \subseteq \complement_{\mathbb{X}} F$ *ce qui contredit* $x_n \in F$*.*
• $F \subseteq \mathcal{L}$?) *Soit* $x \in F$*, alors on peut considérer* x *comme limite de la suite constante* $x_n = x$ *et donc* $x \in \mathcal{L}$*.*
$\Longleftarrow$ *) Supposons que la limite de toute suite convergente de* F *appartient à* F*. Soit* $x \in Adh(F)$*, alors* $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$ *pour tout* $r > 0$*. Donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *il existe* x_n *tel que* $x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap F$*. Donc,* (x_n) *est une suite d'éléments de* F *qui vérifie* $d(x_n,x) < \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *c'est-à-dire* $x_n \longrightarrow x$ *et donc* $x \in F$ *d'après l'hypothèse d'où on conclut que* F *est fermée.*

De la proposition précédente on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Soient* $(\mathbb{X},d)$ *un espace métrique et* F *une partie de* $\mathbb{X}$*, alors :*

$$Adh(F) = \left\{x \in \mathbb{X} : \exists\ (x_n) \subset F\ /\ \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x\right\} \tag{3.2}$$

Proposition 3.3. *Soit* (x_n) *une suite d'un espace métrique* $(\mathbb{X},d)$*. Alors, un point* x *est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si et seulement si* x *est une limite d'une suite extraite de* (x_n)*.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que* x *est une valeur d'adhérence de* (x_n)*, donc on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \exists\ m \in \mathbb{N}\ /\ m \geqslant n \text{ et } d(x_m,x) < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{k}$*, alors pour tout* $k \geqslant 1$ *il existe* m_k *tel que* $d(x_{m_k},x) < \varepsilon$ *ce qui montre que* (x_{m_k}) *est une suite extraite de* (x_n) *et convergente vers* x*.*

$\Longleftarrow$) *Évidente.*

On a vu dans le premier chapitre que la continuité implique la continuité séquentielle et que la réciproque n'est pas vraie (voir 1.19). La proposition suivante montre que la continuité et la continuité séquentielle sont équivalentes dans les espaces métriques.

Proposition 3.4. *Soient* $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$*,* $(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces métriques et* $f : (\mathbb{X},d_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$*. Alors,* f *est continue si et seulement si* f *est séquentiellement continue.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que* f *est continue et soit* (x_n) *une suite de* $\mathbb{X}$ *telle que* $x_n \longrightarrow x_0$*. Alors, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow d_{\mathbb{X}}(x_n,x_0) < \varepsilon.$$

et puisque f *est continue, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon,x_0)\ /\ \forall x \in \mathbb{X},\ d_{\mathbb{X}}(x,x_0) < \delta \Longrightarrow d_{\mathbb{Y}}(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

Donc, il suffit de prendre $\varepsilon = \delta$ pour obtenir :

$$\forall\ n \geqslant n_0,\ d_{\mathbb{X}}(x_n, x_0) < \varepsilon \Longrightarrow d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon,$$

ce qui montre que f est séquentiellement continue.

$\Longleftarrow$) *Supposons que f n'est pas continue en x_0. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe x_δ qui satisfait :*

$$d_{\mathbb{X}}(x_\delta, x_0) < \delta \text{ et } d_{\mathbb{Y}}(f(x_\delta), f(x_0)) > \varepsilon.$$

Donc, pour $\delta = \dfrac{1}{n}$ il existe une suite (x_n) qui satisfait :

$$d_{\mathbb{X}}(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ et } d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon,$$

ce qui montre que (x_n) converge vers x_0 tandis que $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$ et donc f n'est pas séquentiellement continue.

3.1.2 Suite de Cauchy et complétude

Définition 3.2. *Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{X}$ est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, si $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$ alors $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Autrement dit,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ /\ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n,m \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Exemple 3.2.

1. *Les suites $x_n = \dfrac{1}{2n}$, $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ et $x_n = e^{-n}$ sont des suites de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$.*
2. *Si (x_n) est une suite de Cauchy dans l'espace métrique discret (d, δ), alors $\delta(x_n, x_m) < \varepsilon \Longrightarrow x_n = x_m$ et donc convergente.*
3. *Toute suite constante est convergente et ce dans tous les espaces métriques.*

Les propriétés suivantes sont très pratiques.

Proposition 3.5. *Dans un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ on a :*

1) *Toute suite convergente est de Cauchy.*

2) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

3) *Toute sous-suite de Cauchy est de Cauchy.*

4) *Tout suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.*

Preuve. ***1)*** *Si $x_n \longrightarrow x_0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $d(x_n, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc, si $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$ on obtient $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.*

2) *Si* (x_n) *est une suite de Cauchy, alors pour* $\varepsilon = 1$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ *pour tout* $n \geqslant n_0$. *Soit* $r = max(d(x_{n_0}, x_1), ..., d(x_{n_0}, x_{n_0 - 1}), 1)$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $d(x_n, x_{n_0}) < r$ *d'où* $(x_n) \subset B(x_{n_0}, r)$.

3) *Évident.*

4) *Soit* $x_{n_k} \longrightarrow x_0$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n_k \geqslant n_1$ *on a* $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ *et puisque* x_n *est une suite de Cauchy, il existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n, m \geqslant n_2$ *on a* $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. *Posons* $n_0 = max(n_1, n_2)$ *et choisissons* $n_k \geqslant n_0$ *pour obtenir :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

et donc $x_n \longrightarrow x_0$.

Définition 3.3. *Un espace métrique* $(\mathbb{X}, d)$ *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* $(\mathbb{X}, d)$ *est convergente dans* $(\mathbb{X}, d)$.

Exemple 3.3. *1. L'espace* $(\mathbb{R}, |.|)$ *est complet car toute suite de Cauchy est convergente dans* $\mathbb{R}$.

2. La suite de Cauchy $(\frac{1}{n})$ *ne converge pas dans* $]0, 1[$ *et donc* $]0, 1[$ *n'est pas complet.*

3. Dans un espace métrique discret toute suite de Cauchy est convergente (voir Exemple 3.2(2)) et donc tout espace métrique discret est complet.

Remarque 3.2. *La réciproque de (1) et (2) dans la proposition prcédente est fausse.*

- *Pour (1), voir l'exemple (3.3(2)).*
- *Pour (2), la suite* $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ *est bornée dans* $\mathbb{R}$ *mais n'est pas de Cauchy.*

Proposition 3.6. *Si* $f : (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *est uniformément continue et* (x_n) *est une suite de Cauchy dans* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, *alors* $f(x_n)$ *est une suite de Cauchy dans* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$

Preuve. *Si* (x_n) *est une suite de Cauchy dans* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, *alors on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ /\ \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ n, m \geqslant n_0 \Longrightarrow d_{\mathbb{X}}(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

et puisque f *est uniformément continue on obtient pour* $\varepsilon = \delta$ *:*

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ n, m \geqslant n_0 \Longrightarrow d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon,$$

et donc $f(x_n)$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathbb{Y}$.

Remarque 3.3. *La proposition précédente est fausse si* f *est seulement continue. Par exemple, si on prend la fonction* $f : (]-1, 1[, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ *définie par* $f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$ *alors pour* $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ *la suite* $(f(x_n))$ *n'est pas une suite de Cauchy.*

Proposition 3.7. *Soient* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *et* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces métriques et* $f : (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *un homéomorphisme uniformément continue. Si* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *est complet, alors* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *est complet.*

Preuve. *Soit* (x_n) *une suite de Cauchy dans* $\mathbb{X}$. *Alors,* $(f(x_n))$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathbb{Y}$ *d'après la proposition (3.6) et puisque* $\mathbb{Y}$ *est un espace complet on conclut que* $(f(x_n))$ *est convergente ce qui entraîne la convergence de* (x_n) *dans* $\mathbb{X}$ *car* f^{-1} *est continue.*

Remarque 3.4. *La réciproque dans la proposition précédente n'est pas vraie.*

En utilisant la proposition précédente on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.8. *Si* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *et* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *deux espaces isométriques, alors* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *est complet ssi* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *est complet.*

Preuve. *Évidente, car tout isométrique et son inverse sont des homéomorphismes uniformément continues.*

Proposition 3.9. .

1) *Toute partie complet dans un espace métrique* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *est fermée.*

2) *Toute partie fermée dans un espace métrique complet* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *est complet.*

Preuve. ***1)*** *Soit* A *une partie complet de* $\mathbb{X}$ *et soit* $x \in Adh(A)$, *alors il existe une suite* (x_n) *d'éléments de* A *telle que* $x_n \longrightarrow x$ *(voir la proposition (3.2)). Puisque* (x_n) *est une suite de Cauchy dans* A *qui est complet, alors* $x \in A$ *ce qui montre que* A *est fermée.*

2) *Soient* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espace métrique complet et* (x_n) *une suite de Cauchy dans une partie fermée* $A \subset \mathbb{X}$. *Alors,* (x_n) *est une suite de Cauchy dans* $\mathbb{X}$ *qui est complet et donc* $(x_n) \longrightarrow x \in \mathbb{X}$ *et comme* A *est fermée on en déduit que* $x \in A$ *ce qui montre que* A *est complet.*

En utilisant la proposition précédente on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.10. *Soient* $\mathbb{X}$ *un espace métrique complet et* A *une partie de* $\mathbb{X}$. *Alors, le sous-espace métrique* (A, d_A) *est complet si et seulement si* A *est fermée dans* $\mathbb{X}$.

Exemple 3.4. ***1)*** *Les intervalles* $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ *ne sont pas complet car ne sont pas fermés.*

2) *Les intervalles* $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ *sont complet car fermés.*

Théorème 3.1 (Théorème de Cantor). *Un espace métrique* $(\mathbb{X}, d)$ *est complet si et seulement si l'intersection de toute suite de parties fermées non vide* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de* $\mathbb{X}$ *qui vérifie* $diam F_n \longrightarrow 0$ *et* $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset F_{n+1} \supset ...$ *est un singleton.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que* $(\mathbb{X},d)$ *est complet et que* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *vérifie les deux conditions de la proposition. Pour tout* $n \geqslant 1$ *soit* $x_n \in F_n$. *Puisque* $diam F_n \longrightarrow 0$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $diam F_n < \varepsilon$ *pour tout* $n \geqslant n_0$. *Donc, pour tout* $n,m \geqslant n_0$ *on a* $d(x_n,x_m) < diam F_{n_0} < \varepsilon$ *d'où on conclut que la suite* (x_n) *est une suite de Cauchy et donc convergente vers* $x \in \mathbb{X}$ *car* $\mathbb{X}$ *est complet. Puisque les parties* F_n *sont fermées, alors* $x \in \bigcap\limits_{n\geqslant 1} F_n$. *Soit* $y \in \bigcap\limits_{n\geqslant 1} F_n$, *alors* $d(x,y) < diam F_n$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *et puisque* $diam F_n \longrightarrow 0$ *on conclut que* $x = y$ *et donc* $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} F_n = \{x\}$.

$\Longleftarrow$) *Soit* (x_n) *une suite de Cauchy dans* $\mathbb{X}$. *Alors, pour tout* $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k}$, $k \geqslant 0$, *il existe* $n_k \in \mathbb{N}$ *tel que* $d(x_n,x_{n_k}) < \dfrac{1}{2^k}$ *pour tout* $n \geqslant n_k$. *Si on note par* F_{k+1} *la boule fermée de centre* $x_{n_{k+1}}$ *et de rayon* $\dfrac{1}{2^k}$ *on obtient :*

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$$

tel que $diam F_n \longrightarrow 0$. *Ainsi, par hypothèse* $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} F_n = \{x\}$ *et donc la suite extraite* (x_{n_k}) *est convergente vers* x. *En utilisant la proposition (3.5(4)) on conclut que* $x_n \longrightarrow x$ *ce qui montre que* $(\mathbb{X},d)$ *est complet.*

Exemple 3.5. $(\mathbb{R},|.|)$ *est complet (voir Remarque (A.7)).*

Remarque 3.5. *La complétude n'est pas une propriété topologique. On a vu dans l'exemple (1.29) que* $(\mathbb{R},|.|)$ *et* $(]-1,1[,|.|)$ *sont homéomorphe mais* $\mathbb{R}$ *est complet cependant* $]-1,1[$ *n'est pas complet.*

Proposition 3.11. *Le produit d'un nombre fini d'espaces métriques est complet si et seulement si tous ses facteurs sont complets.*

Preuve. *Exercice.*

3.2 Point fixe des applications contractantes

Théorème 3.2 (Théorème de point fixe de Picard-Banach). *Soit* $(\mathbb{X},d)$ *un espace métrique complet. Si* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est une contraction (voir la définition (2.15)) alors elle admet un unique point fixe* $x \in \mathbb{X}$, *c-à-d.* $f(x) = x$.

Preuve. *On considère une suite récurrente donnée par* $x_{n+1} = f(x_n)$ *avec* $x_0 \in \mathbb{X}$. *Pour tout* $n,m \in \mathbb{N}$ *si on suppose que* $n > m$ *on obtient :*

$$\textbf{(1)} \qquad d(x_n,x_m) \leqslant \sum_{\ell=m}^{n} d(x_{\ell+1},x_\ell) = \sum_{\ell=m}^{n-1} d\left(f^\ell(x_1), f^\ell(x_0)\right).$$

D'autre part, en utilisant la propriété de contraction on obtient :

$$\textbf{(2)} \qquad d\left(f^\ell(x_1), f^\ell(x_0)\right) \leqslant k d\left(f^{\ell-1}(x_1), f^{\ell-1}(x_0)\right) \leqslant k^\ell d(x_1,x_0).$$

*Maintenant, en gardant à l'esprit que $0<k<1$ et en utilisant **(1)** et **(2)** on obtient :*

$$\textbf{(3)}\qquad d(x_n,x_m)\leqslant \sum_{\ell=m}^{n-1} k^{\ell} d(x_1,x_0)=k^m\frac{1-k^{n-m-1}}{1-k}d(x_1,x_0)\leqslant \frac{k^m}{1-k}d(x_1,x_0).$$

*Puisque $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty}\dfrac{k^m}{1-k}=0$, on conclut de l'inégalité **(3)** que (x_n) est une suite de Cauchy et donc convergente vers $x\in\mathbb{X}$ car $(\mathbb{X},d)$ est complet. Puisque f est continue on obtient :*

$$f(x)=f\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}x_n\right)=\lim_{n\longrightarrow\infty}f(x_n)=\lim_{n\longrightarrow\infty}(x_{n+1})=x.$$

Ainsi, x est un point fixe de f.
Pour l'unicité, supposons que x_1 et x_2 sont deux points fixes de f. On a alors :

$$d(x_1,x_2)=d(f(x_1),f(x_2))\leqslant kd(x_1,x_2)\Longrightarrow(1-k)d(x_1,x_2)\leqslant 0.$$

Puisque $0<k<1$ on conclut de la dernière inégalité que $x_1=x_2$.

Remarque 3.6. ***1)*** *Une application qui possède un point fixe ou plusieurs points fixes n'est pas forcément une application contractante.*
2) *L'hypothèse " f contractante " ne peut être remplacée en général par l'hypothèse plus faible $d(f(x),f(y))\leqslant d(x,y)$ pour tout $x\neq y$, comme le montre l'exemple suivant :*

$$f:(\mathbb{R},|.|)\longrightarrow(\mathbb{R},|.|)\ \textit{telle que}\ f(x)=\sqrt{1+x^2}.$$

3) *L'hypothèse " $\mathbb{X}$ est complet " est fondamental. Par exemple si $\mathbb{X}=]0,\frac{1}{4}[$ (n'est pas complet) et $f:\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{X}$ définie par $f(x)=x^2$, alors f est une contraction sur $\mathbb{X}$ qui n'admet aucun point fixe dans $\mathbb{X}$.*

Ce théorème se généralise facilement de la manière suivante.

Théorème 3.3. *Soit $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique complet et $f:(\mathbb{X},d)\longrightarrow(\mathbb{X},d)$. S'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ telle que f^n soit contractante, alors f admet un unique point fixe.*

Preuve. *Puisque $(\mathbb{X},d)$ est complet et f^n une application contractante, alors f^n possède un unique point fixe $x_0\in\mathbb{X}$. Comme $f^n(f(x_0))=f(f^n(x_0))=f(x_0)$ on en déduit, par l'unicité du point fixe de f^n, que $f(x_0)=x_0$ d'où x_0 est l'unique point fixe de f.*

Corollaire 3.1. *Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ avec $|f'|\leqslant k<1$, alors f possède un unique point fixe.*

Preuve. *En utilisant la proposition (2.15) on conclut que f est une contraction sur $\mathbb{R}$ et puisque $\mathbb{R}$ est complet on conclut d'après le théorème (3.2) que f possède un unique point fixe.*

Exemple 3.6. *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *définie par* $f(x) = \dfrac{e^x}{5}$. *On a* $|f'(x)| = \dfrac{e^x}{5} \leqslant \dfrac{e}{5} < 1$ *et* $[0,1]$ *est complet car est un fermé dans* $\mathbb{R}$ *qui est complet.Donc, en utilisant le théorème (3.2) on conclut que* f *possède un unique point fixe.*

CHAPITRE 4

ESPACES COMPACTS

4.1 Compacité dans les espaces topologiques

4.1.1 Espaces et parties compacts

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\{O_i : i \in I\}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{X}$.

Définition 4.1. *On dit que la famille* $\{O_i : i \in I\}$ *est un recouvrement d'ouverts de* $\mathbb{X}$ *si* $\mathbb{X} = \underset{i\in I}{\cup} O_i$.

Définition 4.2. *On dit que la famille* $\{O_i : i \in I\}$ *est un recouvrement d'ouverts d'une partie* A *de* $\mathbb{X}$ *si* $A \subseteq \underset{i\in I}{\cup} O_i$.

Définition 4.3 (**Borel-Lebesgue**). *L'espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *est dit compact s'il est séparé et pour tout recouvrement d'ouverts* $\{O_i : i \in I\}$ *de* $\mathbb{X}$ *on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit :*

$$\left(\mathbb{X} = \underset{i\in I}{\cup} O_i\right) \Longrightarrow \left(\exists J \text{ (fini) } \subset I \text{ tel que } \mathbb{X} = \underset{i\in J}{\cup} O_i\right). \tag{4.1}$$

Par complétude dans la définition (4.3) on obtient la définition suivante.

Définition 4.4. *L'espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *est dit compact s'il est séparé et pour toute famille de fermés* $\{F_i : i \in I\}$ *de* $\mathbb{X}$ *ayant une intersection vide, on peut extraire une sous famille finie ayant la même propriété. Autrement dit :*

$$\left(\underset{i\in I}{\cap} F_i = \emptyset\right) \Longrightarrow \left(\exists J \text{ (fini) } \subset I \text{ tel que } \underset{i\in J}{\cap} F_i = \emptyset\right). \tag{4.2}$$

Exemple 4.1. ***1)*** *L'espace* $(\mathbb{R}, |.|)$ *est séparé, mais n'est pas compact car la famille* $\{]-n, +n[: n \in \mathbb{N}\}$ *est une recouvrement ouvert de* $\mathbb{R}$ *qui n'admet aucun sous-recouvrement fini de* $\mathbb{R}$.

2) *L'espace* $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ *est séparé, mais n'est pas compact car la famille* $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ *est une recouvrement ouvert de* $\mathbb{R}$ *qui n'admet aucun sous-recouvrement fini de* $\mathbb{R}$*.*
3) *Tout espace séparé et fini est compact.*

Définition 4.5. *Une partie* A *d'un espace topologique séparé* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *est dite compacte si le sous-espace topologique* $(A, \mathcal{T}_A)$ *est compact. Autrement dit :*

$$\left(A \subset \bigcup_{i\in I} O_i\right) \Longrightarrow \left(\exists J \text{ (fini) } \subset I \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i\in J} O_i\right). \tag{4.3}$$

Remarque 4.1. *La propriété de Borel-Lebesgue dans* $(A, \mathcal{T}_A)$ *s'écrit avec les ouverts de* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *sous la forme (4.3).*

Proposition 4.1. *Une partie* A *d'un espace topologique séparé* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *est compacte si et seulement si pour toute famille de fermés* $\{F_i : i \in I\}$ *de* $\mathbb{X}$ *on a :*

$$\left(A \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \emptyset\right) \Longrightarrow \left(\exists J \text{ (fini) } \subset I \text{ tel que } A \cap (\bigcap_{i\in J} F_i) = \emptyset\right). \tag{4.4}$$

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que* A *est compact, alors on a*

$$\left(A \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \emptyset\right) \Longrightarrow \left(A \subset \complement_{\mathbb{X}}(\bigcap_{i\in I} F_i) = \bigcup_{i\in I} \complement_{\mathbb{X}} F_i\right)$$

En utilisant la définition (4.5), puisque $\left\{\complement_{\mathbb{X}} F_i : i \in I\right\}$ *est une famille d'ouverts de* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$*, on déduit que :*

$$\exists J \text{ (fini) } \subset I \text{ tel que } A \subset \complement_{\mathbb{X}}(\bigcap_{i\in J} F_i) = \bigcup_{i\in J} \complement_{\mathbb{X}} F_i.$$

ce qui montre que :

$$\exists J \text{ (fini) } \subset I \text{ tel que } A \cap (\bigcap_{i\in J} F_i) = \emptyset.$$

$\Longleftarrow$) *D'une part on a :*

$$\left(A \subset \complement_{\mathbb{X}}(\bigcap_{i\in J} F_i) = \bigcup_{i\in J} \complement_{\mathbb{X}} F_i\right) \Longleftrightarrow \left(A \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \emptyset\right).$$

D'autre part, en utilisant (4.4) on obtient :

$$\begin{aligned}\left(A \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \emptyset\right) &\Longrightarrow \left(\exists J \text{ (fini) } \subset I \text{ tel que } A \cap (\bigcap_{i\in J} F_i) = \emptyset\right)\\ &\Longrightarrow \left(\exists J \text{ (fini) } \subset I \text{ tel que } A \subset \complement_{\mathbb{X}}(\bigcap_{i\in J} F_i) = \bigcup_{i\in J} \complement_{\mathbb{X}} F_i\right).\end{aligned}$$

et puisque $\left\{\complement_{\mathbb{X}} F_i : i \in I\right\}$ *est une famille d'ouverts de* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *on conclut que* A *est compact .*

Exemple 4.2. *1)* $A =]0,1]$ *n'est pas compact car* $I_n =]\frac{1}{n},1]$ *est une suite d'ouverts de* A *recouvrant* A *et dont on ne peut extraire aucun sous recouvrement fini.*
2) *Toute partie finie d'un espace séparé est compacte.*

4.1.2 Propriétés des espaces topologiques compacts

Proposition 4.2. *Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est fermée.*

Preuve. *Soit* K *une partie compacte dans un espace topologique séparé* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$. *Il suffit de montrer que* $\complement_{\mathbb{X}} K$ *est ouvert. Soit* $x \in \complement_{\mathbb{X}} K$. *Comme* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *est séparé, pour tout* $y \in K$ *ils existent deux ouverts* $V_{x,y} \in \mathcal{V}(x)$ *et* $W_{x,y} \in \mathcal{V}(y)$ *tels que* $V_{x,y} \bigcap W_{x,y} = \emptyset$. *La famille* $\{W_{x,y} : y \in K\}$ *est un recouvrement d'ouverts de* K *qui est compact, donc on peut extraire un sous-recouvrement d'ouverts fini* $\{W_{x,y_i} : i = 1, ..., n\}$ *tel que* $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{x,y_i}$. *Si on prend* $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x,y_i}$ *on obtient* $V \in \mathcal{V}(x)$ *et* $V \subset \complement_{\mathbb{X}} K$ *ce qui montre que* $\complement_{\mathbb{X}} K$ *est ouvert.*

Proposition 4.3. *Si* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *est un espace topologique compact et* $F \subset \mathbb{X}$, *alors* F *est compact si et seulement si* F *est un fermé de* X *.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Évidente d'après la proposition précédente.*
$\Longleftarrow$) *Supposons que* F *est un fermé de* $\mathbb{X}$. *Alors, si* $\{F_i : i \in I\}$ *est une famille de fermés de* $\mathbb{X}$ *telle que* $F \cap (\bigcap_{i \in I} F_i) = \emptyset$, *on obtient* $\bigcap_{i \in I} (F \cap F_i) = \emptyset$. *Donc, d'après la définition (4.4) il existe* $J(fini) \subset I$ *tel que* $\emptyset = \bigcap_{i \in J} (F \cap F_i) = F \cap (\bigcap_{i \in J} F_i)$. *Donc,* F *est compact d'après la proposition (4.1).*

Proposition 4.4. *Dans un espace topologique séparé, une union finie de compacts est compacte.*

Preuve. *Soit* $\{K_k : k = 1, ..., n\}$ *une famille finie de compacts dans un espace topologique* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *et soit* $K = \bigcup_{k=1}^{n} K_k$. *Alors, tout recouvrement d'ouverts* $\{O_i : i \in I\}$ *de* K *est un recouvrement d'ouverts de* K_k, *pour tout* $k = 1, ..., n.$. *Donc, il existe* $J_k(fini) \subset I$ *tel que* $K_k \subset \bigcup_{i \in J_k} O_i$, *pour tout* $k = 1, ..., n.$. *On prend* $J = J_1 \cup ... \cup J_n$, *alors* $\bigcup_{i \in J} O_i$ *est un sous-recouvrement fini de* K *et donc* K *est compact.*

Proposition 4.5. *Dans un espace topologique séparé, une intersection quelconque de parties compactes est compacte.*

Preuve. *Soit* $\{K_i : i \in I\}$ *une famille de compacts dans un espace topologique séparé* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *et soit* $K = \bigcap_{i \in I} K_i$. *Alors,* K *est un fermé (car c'est une intersection de fermé) dans un compactes* K_{i_0}, $i_0 \in I$. *Donc, d'après la proposition (4.3)* K *est compact.*

Lemme 4.1 (Bolzano-Weierstrass). *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ *un espace topologique compact. Alors, toute partie non finie de* $\mathbb{X}$ *possède au moins un point d'accumulation.*

Preuve. *Si A est une partie non finie de $\mathbb{X}$ qui ne possède aucun point d'accumulation, alors pour tout $x \in \mathbb{X}$ il existe un voisinage ouvert $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tel que* $V_x \cap A = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{si } x \notin A. \end{cases}$ *d'où la famille $\{V_x : x \in \mathbb{X}\}$ est un recouvrement d'ouverts de $\mathbb{X}$ qui est compact. Donc, on peut extraire un sous-recouvrement finie $\{V_{x_i} : i = 1, ..., n\}$ tel que $\mathbb{X} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Mais, $A = A \cap \mathbb{X} = A \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i} \right) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (A \cap V_{x_i})$ et donc A contient au plus n éléments ce contredit que A est infini.*

Lemme 4.2 (Weierstrass). *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ deux espaces topologiques tel que $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ est séparé et soit $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ une application continue. Si A est une partie compacte dans $\mathbb{X}$, alors $f(A)$ est une partie compacte dans $\mathbb{Y}$.*

Preuve. *Soit $\{O_i : i \in I\}$ un recouvrement d'ouverts de $f(A)$, c-à-d. $f(A) \subset \bigcup\limits_{i \in I} O_i$. Comme f est continue, la famille $\left\{f^{-1}(O_i) : i \in I\right\}$ est un recouvrement d'ouverts de A et par compacité de A, il existe $J(fini) \subset I$ tel que $A \subset \bigcup\limits_{i \in J} f^{-1}(O_i) = f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in J} O_i)$. Comme $f(A) \subset f(f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in J} O_i)) \subset \bigcup\limits_{i \in J} O_i$, on en déduit que $f(A)$ est une partie compacte dans $\mathbb{Y}$.*

Remarque 4.2. *D'après la proposition précédente on conclut que la compacité est une propriété topologique.*

Le corollaire suivant est une version du théorème des valeurs extrêmes.

Corollaire 4.1 (Heine). *Si $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ est un espace topologique compact et $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ est une application continue, alors f est bornée sur $\mathbb{X}$ et ils existent $a, b \in \mathbb{X}$ tels que $f(a) = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}} f(x)$ et $f(b) = \inf\limits_{x \in \mathbb{X}} f(x)$.*

Preuve. *Puisque f est continue et $\mathbb{X}$ est compact, alors $f(\mathbb{X})$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}, |.|)$ (voir Lemme (4.2)). On en déduit que $f(\mathbb{X})$ est fermée et bornée (voir la proposition (4.2)). Soit $M = \sup f(\mathbb{X})$, alors comme $f(\mathbb{X})$ est fermée on a $M \in f(\mathbb{X})$ et donc il existe $a \in \mathbb{X}$ tel que $f(a) = M = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}} f(x)$. On montre de même que l'inf est atteint.*

Remarque 4.3. *Le corollaire précédent montre que les applications continues sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$ atteignent leurs bornes.*

Proposition 4.6. *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ un espace compact, $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ un espace séparé et $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ une application continue, alors f est fermée.*

Preuve. *Soit F une partie fermée de $\mathbb{X}$, alors F est compacte (voir la proposition (4.3)) et donc $f(F)$ est compact (voir le lemme (4.2)) d'où $f(F)$ est fermée (voir la proposition (4.2)).*

Proposition 4.7. *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ un espace compact, $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ un espace séparé et $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ une bijection continue, alors f est un homéomorphisme.*

Preuve. *Il suffit de montrer que f^{-1} est continue. Soit $g = f^{-1}$. Si F est un fermé de $\mathbb{X}$, alors il est compact et donc $f(F)$ est compact. Mais, une partie compacte d'un espace séparé est fermée et donc $g^{-1}(F) = f(F)$ est fermé. Donc, $g = f^{-1}$ est continue.*

Théorème 4.1 (Théorème de Tychonoff). *Soit $\{(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ une famille d'espaces topologiques, alors $\prod\limits_{i\in I} \mathbb{X}_i$ est compact si et seulement si $\mathbb{X}_i$ est compact pour tout $i \in I$.*

Preuve. *On admettra ce résultat dans le cas général. On le démontre ici simplement dans le cas d'un produit fini d'espaces compacts. Donc, il suffit de le faire pour le produit de deux espaces compacts.*
$\Longrightarrow$) *Si $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ est compact, alors $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont compacts car ils sont les images des projections continues $P_{\mathbb{X}}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) = \mathbb{X}$ et $P_{\mathbb{Y}}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) = \mathbb{Y}$.*
$\Longleftarrow$) *Supposons que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont compacts. Soit $\{O_i : i \in I\}$ un recouvrement ouvert de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ ils existent $U_{(x,y)} \in \mathcal{T}_{\mathbb{X}}$ et $V_{(x,y)}\mathcal{T}_{\mathbb{Y}}$ tels que $(x,y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subseteq O_{(x,y)}$ avec $O_{(x,y)} \in \{O_i : i \in I\}$. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{X}$ la famille $\left\{V_{(x,y)} : y \in \mathbb{Y}\right\}$ est un recouvrement ouvert de l'espace compact $\mathbb{Y}$ et donc on peut extraire un sous-recouvrement fini $\left\{V_{(x,y_i)} : i = 1,...,n\right\}$ pour ce dernier. D'autre part, si on prend $W_x = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{(x,y_i)}$ alors la famille $\{W_x : x \in \mathbb{X}\}$ est un recouvrement ouvert de l'espace compact $\mathbb{X}$ et donc on peut extraire un sous-recouvrement fini $\left\{W_{x_j} : j = 1,...,m\right\}$. On en déduit que la famille $\left\{W_{x_j} \times V_{(x_j,y_i)} : i = 1,...,n, j = 1,...,m\right\}$ est un recouvrement fini de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Mais, on a :*

$$W_{x_j} \times V_{(x_j,y_i)} \subseteq U_{(x_j,y_i)} \times V_{(x_j,y_i)} \subseteq O_{(x_j,y_i)}.\ \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Donc, la famille $\left\{O_{(x_j,y_i)} : i = 1,...,n \text{ et } j = 1,...,m.\right\}$ est un recouvrement ouvert fini de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ ce qui montre que $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ est compact.

Définition 4.6 (Compacité relative). *Une partie A est dite relativement compacte dans un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ si $Adh(A)$ est compacte.*

Exemple 4.3. ***1)*** *Toute partie non vide d'un espace compact est relativement compacte.*
2) *Toute partie compacte est relativement compacte.*

Définition 4.7 (Compacité locale). *On dit qu'un espace $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ est localement compacte s'il est séparé et tout point de X possède au moins un voisinage compact.*

Exemple 4.4. ***1)*** $(\mathbb{R}, |.|)$ *est localement compact car il est séparé et on a $[x-r, x+r]$ est un voisinage compact de tout $x \in \mathbb{R}$.*
2) *Tout espace discret est localement compact car il est séparé et on a $\{x\}$ est un voisinage compact de tout point x de cet espace.*

4.2 Compacité dans les espaces métriques

Les définitions de la compacité dans un espace métrique $(\mathbb{X},d)$ sont les mêmes que ceux qu'on a vus dans un espace topologique (voir la section précédente (4.1)).

Remarque 4.4. *Dans un espace topologique abstrait il n'y a pas de notion de distance et donc on a pas parler de parties bornées.*

4.2.1 Espaces précompacts et séquentiellement compacts

Définition 4.8. *Soit A une partie d'un espace métrique $(\mathbb{X},d)$. On dit que A est bornée s'il existe une boule $B(x,r)$ de centre x et de rayon $r>0$ telle que $A\subseteq B(x,r)$.*

Définition 4.9. *Soit $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique et A une partie de $\mathbb{X}$. On dit que A est séquentiellement compact si toute suite de A admet une sous suite convergente.*

Définition 4.10. *Soit $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique et A une partie de $\mathbb{X}$. On dit que A est précompacte (ou totalement bornée) si pour tout $r>0$, ils existent des points $x_1,\dots,x_n$ dans A tels que $A\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i,r)$.*

Remarque 4.5. *D'après les deux définitions (4.8) et (4.10), toute partie précompacte est bornée.*

Exemple 4.5.
1) *Toute partie finie A d'un espace métrique $(\mathbb{X},d)$ est séquentiellement compact car si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A, alors au moins l'un des éléments $x\in A$ doit se répète une infinité de fois dans cette suite et donc la suite $(x_0,\dots,x_i,x,x,\dots)$ est convergente.*
2) *Toute partie finie A d'un espace métrique $(\mathbb{X},d)$ est précompact car pour tout $r>0$, ils existent des points $x_1,\dots,x_n$ dans A tels que $A\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i,r)$.*
3) *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers x_0 dans un espace métrique $(\mathbb{X},d)$, alors l'ensemble $A=\{x_n : n\geqslant 0\}\cup\{x_0\}$ est précompact car pour tout $\varepsilon>0$ il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n,x_0)<\varepsilon.$$

et donc $A\subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n_0-1} B(x_k,\varepsilon)\bigcup B(x_0,\varepsilon)$.

Lemme 4.3. *Si $\{O_i : i\in I\}$ un recouvrement ouvert d'un espace métrique séquentiellement compact $(\mathbb{X},d)$. Alors, il existe $r>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{X}$ la boule $B(x,r)$ est contenue dans l'un des ouverts O_i.*

Preuve. *Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe un point $x_n\in\mathbb{X}$ tel que la boule $B(x_n,\frac{1}{n})$ n'est pas contenue dans chacun des ouverts O_i, c-à-d. $B(x_n,\frac{1}{n})\cap \complement_{\mathbb{X}} O_i\neq\emptyset$ pour tout $i\in I$. Puisque $(\mathbb{X},d)$ est séquentiellement compact, alors (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergente. Soit $x_{n_k}\longrightarrow x\in\mathbb{X}$, alors il existe au moins $i_0\in I$ tel* *que $x \in O_{i_0}$ et donc il existe $r > 0$ tel que $x \in B(x,r) \subset O_{i_0}$. D'autre part, puisque $x_{n_k} \longrightarrow x$ alors la boule $B(x,\frac{r}{2})$ contient une infinité de points de (x_{n_k}) et donc il existe $n_p > \frac{2}{r}$ tel que $x_{n_p} \in B(x,\frac{r}{2})$ ce qui entraîne que $B(x_{n_p},\frac{1}{n_p}) \subset B(x,r) \subset O_{i_0}$, ce qui est une contradiction.*

4.2.2 Propriétés des espaces métriques compacts

Théorème 4.2. *Soit $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique et A une partie fermée de $\mathbb{X}$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *A est compact.*

(2) *Si $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ est une famille de parties fermées de A telles que pour tout $F_1,...,F_n \in \mathcal{F}$ on a $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$, alors $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

(3) *A est séquentiellement compact.*

(4) *Toute partie infinie de A possède un point d'accumulation.*

(5) *A est complet et précompact.*

Preuve.

(1) $\Longrightarrow$ ***(2)*** *Supposons que A est compact et soit $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ est une famille de parties fermées de A telles que pour tout $F_1,...,F_n \in \mathcal{F}$ on a $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$. Alors, si $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, on en déduit que la famille $\left\{\complement_{\mathbb{X}} F_i : i \in I\right\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{X}$ et donc de A. Puisque A est compacte, ils existent $F_1,...,F_n \in \mathcal{F}$ tels que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \complement_{\mathbb{X}} F_i = \complement_{\mathbb{X}} \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ et puisque $F_i \subseteq A$ pour tout $i = 1,...,n$ on conclut que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$, qui est une contradiction au fait que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$.*

(2) $\Longrightarrow$ ***(1)*** *Soit $\{O_i : i \in I\}$ un recouvrement ouvert de A, c-à-d. $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ et donc $\bigcap_{i\in I} \complement_A O_i = \emptyset$ d'où $\bigcap_{i=1}^{n} \complement_A O_i = \emptyset$ (d'après **(2)**) ce qui montre que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i$ et donc A est une partie compact.*

(3) $\Longrightarrow$ ***(4)*** *Si K est une partie infinie de A, alors K contient une suite de points distincts (x_n) ; par **(3)** il existe une sous-suite (x_{n_k}) convergente ver x. Donc x est un point d'accumulation de K.*

(4) $\Longrightarrow$ ***(3)*** *Supposons que (x_n) est une suite de points distincts dans A. En utilisant (4), on conclut que (x_n) possède un point d'accumulation $x \in A$ car A est fermé. La boule $B(x,1)$ contient une infinité d'éléments de la suite (x_n), on choisi $x_{n_1} \in B(x,1)$. La boule $B(x,\frac{1}{2})$ contient une infinité d'éléments de la suite (x_n), on choisi $x_{n_2} \in B(x,\frac{1}{2})$ avec $n_2 > n_1$. On répète ceci, on choisi $x_{n_3} \in B(x,\frac{1}{3})$ avec $n_3 > n_2$. Donc on peut choisir une sous-suite (x_{n_k}), tel que $n_{k+1} > n_k$ et $x_{n_k} \in B(x,\frac{1}{k})$ pour tout $k = 1,2,....$ Il est clair que cette sous suite converge vers x.*

(1) $\Longrightarrow$ ***(4)*** *(Voir le lemme (4.1))*

(1) $\Longrightarrow$ ***(5)*** *Supposons que A est compact.*

• *Soit* (x_n) *une suite de Cauchy dans A. Puisque* ***(1)*** $\Longrightarrow$ ***(4)*** $\Longleftrightarrow$ ***(3)****, il existe une sous-suite* (x_{n_k}) *telle que* $x_{n_k} \longrightarrow x$ *d'où* $x_n \longrightarrow x$ *et donc A est complet.*

• *Pour tout* $r > 0$ *la famille* $\{B(x,r) : x \in A\}$ *est un recouvrement ouverts de A et donc il existe un sou-recouvrement ouvert fini* $\{B(x_i,r) : i = 1,...,n\}$ *de A, c-à-d. ils existent des points* $x_1,...,x_n$ *dans A tels que* $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,r)$ *ce qui montre que A est précompact.*

(5) $\Longrightarrow$ ***(3)*** *Soit* (x_n) *une suite dans A et* (r_n) *une suite décroissante de nombres positifs tels que* $(r_n) \longrightarrow 0$*. En utilisant* ***(5)*** *on conclut qu'il existe un recouvrement fini de A par les boules* $\{B(x_i,r_1) : i = 1,...,n\}$*. Il existe don une boule* $B(y_1,r_1)$ *qui contient un nombre infini d'éléments de* (x_n)*. Soit* $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : d(y_1,x_n) < r_1\}$*. Considérons maintenant la suite* $\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ *et les boules de rayon* r_2*. On répète le processus, il existe* $y_2 \in A$ *tel que* $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}_1 : d(y_2,x_n) < r_2\}$ *est un ensemble infini. Par induction on peut montrer que pour chaque* $i \geqslant 1$ *on choisi un point* $y_k \in A$ *et un ensemble infini* $\mathbb{N}_k$ *tel que* $\mathbb{N}_{k+1} \subset \mathbb{N}_k$ *et* $\{x_n : n \in \mathbb{N}_k\} \subset B(y_k,r_k)$*. Si on pose* $F_k = Adh\{x_n : n \in \mathbb{N}_k\}$*, alors* $F_{k+1} \subset F_k$ *et* $diam F_k \leqslant 2r_k$*. Puisque A est complet, alors le théorème de Cantor implique que* $\bigcap_k F_k = \{x\}$*. Si on choisi* $n_k \in \mathbb{N}_k$ *alors* (x_{n_k}) *est une sous-suite de* (x_n) *convergente vers x et donc A est séquentiellement compact.*

(5) $\Longrightarrow$ ***(1)*** *Soit* $G = \{O_i : i \in I\}$ *un recouvrement ouvert de A. Puisque A set précompact, alors pour tout* $r > 0$ *ils existent* $x_1,...,x_n \in A$ *tels que* $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,r)$*. Mais, pour tout* $1 \leqslant k \leqslant n$ *il existe* $O_k \in G$ *tel que* $x_k \in O_k$*. Donc, il suffit de choisir* $r > 0$ *tel que* $B(x_k,r) \subset O_k$ *pour tout* $1 \leqslant k \leqslant n$ *(voir le lemme 4.3). On en déduit que* $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,r) \subset \bigcup_{k=1}^{n} O_k$*, ce qui montre que la famille* $\{O_k : k = 1,...,n\}$ *est un recouvrement ouvert fini de A et donc A est compact.*

(3) $\Longrightarrow$ ***(5)*** *Soit* (x_n) *une suite de Cauchy dans A, alors* ***(3)*** *implique qu'il existe une sous suite* (x_{n_k}) *telles que* $x_{n_k} \longrightarrow x$*. Puisque* $d(x_n,x) \leqslant d(x_n,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x)$*, alors* $x_n \longrightarrow x$*.*

Proposition 4.8.

1) *Pour tout* $a,b \in \mathbb{R}$ *l'intervalle fermé* $[a,b]$ *est compact dans* $(\mathbb{R},|.|)$*.*

2) *Une partie A de* $(\mathbb{R},|.|)$ *est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Preuve. ***1)*** *L'intervalle [a,b] est fermé dans* $\mathbb{R}$ *qui est complet et donc complet. Donc, d'après le théorème précédent il suffit de montrer qu'il est précompact. En effet, pour tout* $r > 0$ *on peut trouver* $a = x_1, x_2, ..., x_n = b$ *tels que* $x_i - x_{i-1} < r$ *et* $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}]x_i - r, x_i + r[$*.*

2) $\Longrightarrow$) *Soit A un compact dans* $(\mathbb{R},|.|)$*, alors il est complet et précompact, d'après le théorème précédent, et donc il est fermé et borné (voir la proposition (3.9) et la remarque (4.5)).*

$\Longleftarrow$) *Soit A une partie fermée et bornée dans* $(\mathbb{R},|.|)$*, alors il existe un intervalle fermé et borné* $[a,b]$ *tel que* $A \subset [a,b]$ *et puisque* $[a,b]$ *est compact alors A est compacte* *(voir la proposition (4.3)).*

Exemple 4.6.

1) *Toute partie bornée et fermée de* $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *est compacte.*

2) *Toute partie non-bornée ou bien non-fermée de* $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *n'est pas compacte.*

3) *Le disque fermé* $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x,y) \leqslant r\right\}$ *est compact.*

4) *Les rubans* $[a,b] \times \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R} \times [a,b]$ *ne sont pas compacts.*

Lemme 4.4 (Heine). *Si* $f : (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *est continue et* $\mathbb{X}$ *est compact, alors* f *est uniformément continue.*

Preuve. *Supposons que* f *est continue mais pas uniformément. Alors, il existe* $\varepsilon > 0$ *et deux suites* (x_n) *et* (y_n) *dans* $\mathbb{X}$ *telles que :* $d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$ *et* $d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(y_n) \geqslant \varepsilon$. *Puisque* $\mathbb{X}$ *est compact, il existe* $x \in \mathbb{X}$ *et une sous-suite* x_{n_k} *tels que* $d(x_{n_k}, x) \longrightarrow 0$. *On en déduit que* $d(y_{n_k}, x) \leqslant d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leqslant \dfrac{1}{n} + d(x_{n_k}, x)$ *d'où* $y_{n_k} \longrightarrow x$. *Puisque* f *est continue il existe* $\delta > 0$ *tel que :*

$$d_{\mathbb{X}}(x_{n_k}, x) < \delta \Longrightarrow d_{\mathbb{Y}}(f(x_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
$$d_{\mathbb{X}}(y_{n_k}, x) < \delta \Longrightarrow d_{\mathbb{Y}}(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent on obtient :

$$d_{\mathbb{Y}}(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leqslant d_{\mathbb{Y}}(f(x_{n_k}), f(x)) + d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y_{n_k})) < \varepsilon$$

ce qui contredit les hypothèses.

En utilisant le lemme précédent on obtient le résultat suivant.

Corollaire 4.2. *Si* $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une application continue, alors* f *est uniformément continue sur [a,b].*

Proposition 4.9. *Soit* $(\mathbb{X}, d)$ *un espace métrique. Alors, ona*

1) *Toute partie relativement compacte est précompacte.*

2) *Si* $(\mathbb{X}, d)$ *est complet, alors toute partie précompacte est relativement compacte.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Soit* A *une partie de* $\mathbb{X}$ *relativement compacte, alors* $Adh(A)$ *est précompacte d'où* A *est précompacte.*
$\Longleftarrow$) *Supposons que* $(\mathbb{X}, d)$ *est complet. Si* A *est précompact, alors* $Adh(A)$ *est précompact aussi. De plus* $Adh(A)$ *est fermé dans* $\mathbb{X}$ *qui est complet et donc complet ce qui montre que* $Adh(A)$ *est compact (voir théorème (4.2)).*

CHAPITRE 5

ESPACES CONNEXES

5.1 Connexité dans les espaces topologiques

5.1.1 Espaces et parties connexes

Soient les deux espaces $(\mathbb{X},|.|)$ et $(\mathbb{Y},|.|)$ tels que $\mathbb{X} =]2,3[\cup]4,5[$ et $\mathbb{Y} = [2,3]\cup]3,4[$, les deux parties $O_1 =]2,3[$ et $O_2 =]4,5[$ sont à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{X}$ car $O_1 = \mathbb{X}\cap]2,3[= \mathbb{X}\cap[2,3]$ et $O_2 = \mathbb{X}\cap]4,5[= \mathbb{X}\cap[4,5]$. De plus, on a $\mathbb{X} = O_1 \cup O_2$ et donc la famille $\{O_1, O_2\}$ est une partition de $\mathbb{X}$ en deux ouverts (en deux fermés) disjoints. Dans ce cas on va dire que $\mathbb{X}$ n'est pas connexe par contre $\mathbb{Y}$ est connexe car on peut l'écrire sous la forme $\mathbb{Y} = [2,4[$. La connexité que nous allons définir ci-dessous signifie intuitivement qu'un espace est " en un seul morceau " ou encore qu'on ne peut pas le partager en deux parties " éloignées l'une de l'autre ".

Définition 5.1. *On dit qu'un espace topologique $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ est connexe si et seulement s'il n'existe pas une partition de $\mathbb{X}$ en deux ouverts non vides. Autrement dit,*

$$\mathbb{X} \text{ est connexe} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Il n'existent pas } O_1, O_2 \in \mathcal{T} \text{ tels que :} \\ \bullet\ O_1 \cup O_2 = \mathbb{X}. \\ \bullet\ O_1 \cap O_2 = \emptyset. \\ \bullet\ O_1 \neq \emptyset \text{ et } O_2 \neq \emptyset \end{cases} \tag{5.1}$$

Une définition équivalente de la connexité de $\mathbb{X}$ est la suivante.

Définition 5.2. *$\mathbb{X}$ est connexe si et seulement si pour toute partition de $\mathbb{X}$ en deux ouverts O_1 et O_2 on a $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.*

Proposition 5.1. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *$\mathbb{X}$ est connexe.*

(2) *Il n'existe pas une partition de $\mathbb{X}$ en deux ouverts non vides.*

(3) *Il n'existe pas une partition de $\mathbb{X}$ en deux fermés non vides.*

(4) *$\emptyset$ et $\mathbb{X}$ sont les seules parties ouvertes et fermées à la fois dans $\mathbb{X}$.*

(5) *Toute partie $A \subset \mathbb{X}$ telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \mathbb{X}$ possède une frontière non-vide.*

(6) *Il n'existe aucune application continue et surjective de $\mathbb{X}$ vers un espace discret $\mathbb{Y}$ contient deux éléments.*

(7) *Toute application continue $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y} = \{a,b\}$ est constante.*

Preuve. ***(1)***$\Longrightarrow$ ***(2)*** *Par définition.*

(2)$\Longrightarrow$ ***(3)*** *Supposons qu'il existe une partition de $\mathbb{X}$ en deux fermés non vides F_1 et F_2 c-à-d. $F_1 \cup F_2 = \mathbb{X}$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, alors F_1 et F_2 sont deux ouverts non vides qui forment une partition de $\mathbb{X}$ car $\complement_{\mathbb{X}} F_1 = F_2$ et $\complement_{\mathbb{X}} F_2 = F_1$.*

(3)$\Longrightarrow$ ***(4)*** *Supposons qu'il existe un ensemble A à la fois ouvert et fermé et différent de $\mathbb{X}$ et de $\emptyset$. On en déduit que A et $\complement_{\mathbb{X}} A$ forment une partition de $\mathbb{X}$ en deux fermés non vides.*

(4)$\Longrightarrow$ ***(5)*** *Supposons que A est une partie de $\mathbb{X}$ telle que $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{X}$ et $Fr(A) = \emptyset$. On en déduit que A est à la fois ouverte et fermée.*

(5)$\Longrightarrow$ ***(6)*** *Supposons qu'il existe une application $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y} = \{a,b\}$ continue et surjective. Alors, la partie $\{a\}$ est à la fois ouverte et fermée. Donc, $f^{-1}(\{a\})$ est une partie à la fois ouverte et fermée telle que $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(\{a\}) \neq \mathbb{X}$. De plus, $Fr(f^{-1}(\{a\})) = \emptyset$.*

(6)$\Longrightarrow$ ***(7)*** *Supposons qu'il existe une application $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y} = \{a,b\}$ continue et n'est pas constante, alors f est surjective.*

(7)$\Longrightarrow$ ***(1)*** *Supposons que $\mathbb{X}$ n'est pas connexe, alors ils existent deux parties ouvertes et non vides $O_1, O_2 \subset \mathbb{X}$ telles que $O_1 \cup O_2 = \mathbb{X}$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Alors, l'application $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y} = \{a,b\}$ définie par $f(x) = a$ si $x \in O_1$ et $f(x) = b$ si $x \in O_2$ est continue mais n'est pas constante.*

Exemple 5.1.

1) *$\mathbb{R}$ est connexe.*

2) *Tout espace discret $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ tel que card$(\mathbb{X}) \geqslant 2$ n'est pas connexe. En effet, si $x \in \mathbb{X}$ alors on a $\{x\} \bigcup \complement_{\mathbb{X}} \{x\} = \mathbb{X}$ et $\{x\} \bigcap \complement_{\mathbb{X}} \{x\} = \emptyset$ avec $\{x\}$ et $\complement_{\mathbb{X}} \{x\}$ sont deux ouverts (deux fermés).*

3) *Il est évident que tout espace muni de la topologie grossière est connexe.*

Définition 5.3. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie non-vide de $\mathbb{X}$. On dit que A est connexe si et seulement si le sous-espace $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe. Classiquement, nous considérons l'ensemble vide comme étant connexe.*

Exemple 5.2.

1) *Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.*

2) *Toute boule ouverte (fermée) de $\mathbb{R}^n$ est connexe.*

3) *L'espace $(\mathbb{R}^*, |.|)$ n'est pas connexe (pourquoi ?).*

5.1.2 Propriétés des espaces connexes

Proposition 5.2. *Si une partie A d'un espace topologique $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ est connexe, alors l'existence de deux ouverts $O_1,O_2 \in \mathcal{T}$ tels que $A \subset O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ entraîne $A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$.*

Preuve. *Supposons que A est connexe et soient $O_1,O_2 \in \mathcal{T}$ tels que $A \subset O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Alors, $A = (A\cap O_1)\cup(A\cap O_2)$ et $(A\cap O_1)\cap(A\cap O_2) = \emptyset$. Comme A est connexe on obtient $(A\cap O_1 = \emptyset)$ ou $(A\cap O_2 = \emptyset)$ d'où $(A \subset O_2)$ ou $(A \subset O_1)$.*

Proposition 5.3. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique et A,B deux parties de $\mathbb{X}$ telles que A est connexe et $A \subset B \subset Adh(A)$. Alors, on a :*
1) *Si A est connexe, alors B est connexe.*
2) *Si A est connexe, alors $Adh(A)$ est connexe.*
3) *Si A est une partie connexe et dense dans $\mathbb{X}$, alors $\mathbb{X}$ est connexe.*

Preuve.
1) *Soit $f : B \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Comme A est connexe et f est continue sur A, on obtient que f est constante sur A. Comme f est continue sur B, l'ensemble $G = \{x \in B : f(x) \in f(A)\}$ est un fermé de B contenant A d'où $Adh(A)_B \subset G$. Donc f est constante sur l'adhérence de A dans B qui est $Adh(A)_B = B \cap Adh(A) = B$. On en déduit que f est constante sur B. Donc, B est connexe.*
2) *Il suffit de prendre $B = Adh(A)$ dans **1)**.*
3) *On a $Adh(A) = \mathbb{X}$ car A est dense dans $\mathbb{X}$ et $Adh(A)$ est connexe car A est connexe (voir la question **(2)**). On en déduit que $\mathbb{X}$ est connexe.*

Proposition 5.4. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y},\mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ deux espaces topologiques et $f : (\mathbb{X},\mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y},\mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ une application continue. Si $\mathbb{X}$ est connexe alors $f(\mathbb{X})$ est une partie connexe de $\mathbb{Y}$.*

Preuve. *Soit G une partie ouverte et fermée de $f(\mathbb{X})$ pour la topologie induite. Comme f est continue comme application à valeurs dans $f(\mathbb{X})$ muni de la topologie induite, on en déduit que $f^{-1}(G)$ est à la fois ouverte est fermée dans $\mathbb{X}$. Puisque $\mathbb{X}$ est connexe, on en déduit que $f^{-1}(G) = \emptyset$ ou $f^{-1}(G) = \mathbb{X}$. Comme $f(f^{-1}(G)) = G$ on obtient que $G = \emptyset$ ou $G = f(\mathbb{X})$ ce qui montre que $f(\mathbb{X})$ est connexe.*

Remarque 5.1. *D'après la proposition précédente la connexité est une propriété topologique.*

Proposition 5.5. *Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique.*
1) *Si $\{A_i : i \in I\}$ est une famille quelconque de parties connexes de $\mathbb{X}$ telle que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe.*
2) *Si $\{A_i : i \in I\}$ est une famille quelconque de parties connexes de $\mathbb{X}$ telle que*

$A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pour tout $i,j \in I$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.
3) *Si $\{A_i : i \in I\}$ est une famille quelconque de parties connexes de $\mathbb{X}$ totalement ordonnée, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

On va faire la démonstration pour le premier cas seulement.

Preuve. *Soit $a \in \bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Si $f : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \{0,1\}$ est une application continue, alors $f_{|A_i}$ est continue, et donc constante par connexité de A_i. Comme $a \in A_i$ pour tout $i \in I$, on obtient $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in A_i$. Donc, $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, c-á-d. f est constante sur $\bigcup_{i\in I} A_i$ ce qui montre que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Proposition 5.6. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Preuve. *Supposons que l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, alors il existe $(x,y) \in A \times A$ tel que $x < y$ et $[x,y] \nsubseteq A$, c-à-d. il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $x < z < y$ et $z \notin A$. Alors, $O_1 =]-\infty, z[\cap A$ et $O_1 =]z,+\infty[\cap A$ sont deux ouverts non vides de A. De plus, on a $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ et $O_1 \cup O_2 = A$. Donc, A n'est pas connexe.*
Réciproquement, Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Supposons que $I = O_1 \cup O_2$ tels que O_1 et O_2 deux ouverts non vides de I avec $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Soient $x \in O_1$ et $y \in O_2$ tels que $x < y$ et soit $z = sup(O_1 \cap [x,y])$. D'une part, si $z \in O_1$ alors $z < y$ ce qui entraîne l'existence d'un réel $r > 0$ tel que $[z, z+r[\subset O_1 \cap [x,y]$ ce qui contredit la définition de z. D'autre part, si $z \in O_2$ alors $z > x$ ce qui entraîne l'existence d'un réel $r > 0$ tel que $]z-r, z] \subset O_2 \cap [x,y]$ ce qui contredit la définition de z. On en déduit que $z \notin O_1$ et $z \notin O_2$ ce qui est impossible car $[x,y] \subset I$. Donc I est connexe.

En utilisant les deux proposition (5.4) et (5.6) on obtient les deux résultats suivants.

Proposition 5.7. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.*
1) *L'image de toute partie connexe de $\mathbb{X}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*
2) *Soit $a, b \in f(\mathbb{X})$, si $\mathbb{X}$ est connexe alors l'équation $f(x) = c$ possède une solution pour tout $c \in [a,b]$.*

Proposition 5.8. *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ deux espaces topologiques. Alors $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ est connexe si et seulement si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ le sont.*

Preuve. *Supposons que $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ est connexe. On a $p_{\mathbb{X}}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) = \mathbb{X}$ et $p_{\mathbb{Y}}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) = \mathbb{Y}$ telles que $p_{\mathbb{X}}, p_{\mathbb{Y}}$ sont les projection canonique continues. On en déduit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont connexes.*
Réciproquement, supposons que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont connexes et soit $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Donc, il suffit de montrer que f est constante. Comme $\mathbb{Y}$ est connexe, alors l'application $f(x,.) : \mathbb{Y} \longrightarrow \{0,1\}$ est constante et donc $f(x,y_1) = f(x,y_2)$ pour tout $x \in \mathbb{X}$. Comme $\mathbb{X}$ est connexe, alors l'application $f(.,y) : \mathbb{X} \longrightarrow$

$\{0,1\}$ *est constante et donc* $f(x_1,y) = f(x_2,y)$ *pour tout* $y \in \mathbb{Y}$. *Donc,* $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$ *pour tout* $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ *ce qui montre que* f *est constante et donc* $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ *est connexe.*

Dans le cas général on a le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Soit* $\{(\mathbb{X}_i,\mathcal{T}_i) : i \in I\}$ *une famille d'espaces topologiques, alors* $\prod\limits_{i\in I}\mathbb{X}_i$ *est connexe si et seulement si* $\mathbb{X}_i$ *est connexe pour tout* $i \in I$.

5.1.3 Composantes connexes, espaces localement connexes

Définition 5.4. *Soit* $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ *un espace topologique. Pour tout point* $x \in \mathbb{X}$, *on appelle composante connexe de* x *et on note* $\mathcal{C}(x)$ *la classe d'équivalence de* x *par la relation* $\mathcal{R}$ *définie par "* $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x$ *et* y *appartenir à un même connexe de* $\mathbb{X}$".
Avec cette notation il est clair que deux points x *et* y *appartiennent à un même connexe si et seulement si* $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.

Remarque 5.2. *D'après la définition précédente on conclut que la composante connexe d'un point* x *est l'union de toute les parties connexes contenant* x. *Autrement dit, c'est le plus grand connexe contenant* x. *De plus, les composantes connexes de* $\mathbb{X}$ *forment une partition de* $\mathbb{X}$.

Définition 5.5. *Soit* $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset \mathbb{X}$. A *est dit composante connexe dans* $\mathbb{X}$ *si* A *est connexe et n'est pas contenu dans une autre partie connexe.*

Exemple 5.3.
1) *La seule composante connexe dans* $(\mathbb{R},|.|)$ *c'est* $\mathbb{R}$ *lui même.*
2) $(\mathbb{R}^*,|.|)$ *possède deux composantes connexes sont* $\mathbb{R}^*_-$ *et* $\mathbb{R}^*_+$.

Définition 5.6. *Soit* $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset \mathbb{X}$. *On appelle composantes connexes de* A *les composantes connexes de* $(A,\mathcal{T}_A)$.

Proposition 5.9. *Toute composante connexe est fermée.*

Preuve. *Soit* A *une composante connexe. Alors* A *est connexe et donc* $Adh(A)$ *est une partie connexe contient* A *d'où* $adh(A) = A$ *ce qui montre que* A *est fermé.*

Définition 5.7. *Soit* $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ *un espace topologique. On dit que* $\mathbb{X}$ *est localement connexe si tout point* $x \in \mathbb{X}$ *possède un système fondamental de voisinages connexes.*

Exemple 5.4. $\mathbb{R}$ *est localement connexe.*

Proposition 5.10. *Soit* $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ *un espace topologique.* $\mathbb{X}$ *est localement connexe si et seulement si les composantes connexes des ouverts de* $\mathbb{X}$ *sont des ouverts de* $\mathbb{X}$.

Preuve.
$\Longrightarrow$) *Supposons que $\mathbb{X}$ est localement connexe. Soit O un ouvert de $\mathbb{X}$ et soit $\mathcal{C}(O)$ une composante connexe de O. Alors, pour tout $x \in \mathcal{C}(O)$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que V est connexe et $V \subset O$. Donc, $V \subset \mathcal{C}(O)$ ce qui montre que $\mathcal{C}(O)$ est ouvert (un voisinage de chacun de ses points).*
$\Longleftarrow$) *Soit $x \in \mathbb{X}$ et V un voisinage ouvert de x. Donc, la composante connexe de x dans V est ouvert ce qui montre que $\mathbb{X}$ localement connexe.*

5.1.4 Connexité par arcs

Définition 5.8. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $[x,y]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle chemin dans une partie A de $\mathbb{X}$ toute application continue $\gamma : [x,y] \longrightarrow A$. Limage $\gamma([x,y])$ du chemin s'appelle un arc avec origine $\gamma(x)$ et extrémité $\gamma(y)$.*

Remarque 5.3. *On peut remplacer $[x,y]$ par $[0,1]$ car sont homéomorphes.*

Définition 5.9. *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de $\mathbb{X}$. On dit que A est connexe par arcs si pour tout $a,b \in A$, il existe un arc inclus dans A d'origine a et d'extrémité b.*

Exemple 5.5.
1) *$\mathbb{R}$ est connexe par arcs. Il suffit de prendre comme chemin dans $\mathbb{R}$ l'application $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\gamma(x) = a + x(b-a)$, pour tout $a,b \in \mathbb{R}$.*
2) *$\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ne sont pas connexes par arcs.*

Proposition 5.11. *Un espace connexe par arcs est connexe.*

Preuve. *Supposons que X est connexe par arcs et soit $a \in \mathbb{X}$. Alors, pour tout $b \in \mathbb{X}$ il existe $\gamma_b : [0,1] \longrightarrow \mathbb{X}$ continue telle que $\gamma_b(0) = a$ et $\gamma_b(1) = b$. Donc, $\{\gamma_b([0,1]) : b \in \mathbb{X}\}$ est une famille de parties connexes dont l'intersection est non vide (car elle contient a) et $\mathbb{X} = \bigcup_{b \in \mathbb{X}} \gamma_b([0,1])$ ce qui entraîne que $\mathbb{X}$ est connexe.*

5.2 Connexité dans les espaces métriques

Les définitions et les propriétés de la connexité dans les espaces métriques sont les même qu'on a vus dans les espaces topologiques. Donc, il nous suffit de faire un petit rappel sur ces définitions et propriétés.

5.2.1 définitions et propriétés de la connexité dans les espaces métriques

• $\mathbb{X}$ est un espace connexe si et seulement si les seules parties de $\mathbb{X}$ à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{X}$.
• $\mathbb{X}$ est connexe ssi il n'existe pas de partions de X en deux ouverts non vides.

• $\mathbb{X}$ est connexe ssi il n'existe pas de partions de $\mathbb{X}$ en deux fermés non vides.
• $\mathbb{X}$ est connexe ssi toute application continue $f : (\mathbb{X}, d) \longrightarrow (\{0,1\}, \delta)$ est constante.
• L'image continue d'un connexe est connexe.
• La connexité est une propriété topologique.
• $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ est connexe si et seulement si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont connexes.
• Si A est connexe et $A \subset B \subset Adh(A)$, alors B est connexe.
• Si A est connexe alors et Adh(A) est aussi connexe.
• $\mathbb{X}$ est connexe par arcs si pour tout $a, b \in \mathbb{X}$, il existe une application continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{X}$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.
• Tout espace connexe par arcs est connexe.
• Un espace connexe n'est pas nécessairement connexe par arcs.
• Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est connexe si et seulement si A un intervalle.
• Si $\mathbb{X}$ est connexe et $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $f(X)$ est un intervalle.
• Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a,b]) = [c,d]$.

ANNEXE A

TOPOLOGIE USUELLE DE $\mathbb{R}$

A.1 Rappel

1. Le corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est totalement ordonné c-à-d :
   on peut toujours comparer deux réels r_1 et r_2 ; soit $r_1 > r_2$, soit $r_1 < r_2$, soit $r_1 = r_2$.

2. Une partie non vide $A \subset \mathbb{R}$ est dite majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que

   $$\forall x \in A : \quad x \leq M \quad (\text{ resp. } x \geq m).$$

   On appelle *borne supérieure de* A (*resp. borne inférieure de* A) notée $sup(A)$ (*resp.* $inf(A)$), le plus petit majorant(resp. le plus grand minorant) (s'ils existent) de A. Ces derniers peuvent être des éléments qui n'appartiennent pas à A. De plus, $sup(A)$ possède les deux propriétés suivantes :
   a) $\forall x \in A, \quad x \leq sup(A)$.

   b) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A \quad / \quad sup(A) - \varepsilon < x \leq sup(A)$.

   et $inf(A)$ possède les deux propriétés suivantes :
   a) $\forall x \in A, \; x \geq inf(A)$.

   b) $\forall \varepsilon > 0, \; \exists x \in A \; / \; inf(A) \leq x < inf(A) + \varepsilon$.

   En fin, on a $inf(A) = -sup(-A)$.

3. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque A.1. *a) Si A est majorée par M et $M \in A$, alors M est appelé le plus grand élément de A (noté : $max(A)$) et on a $max(A) = sup(A)$.*

b) Si A est minorée par m et $m \in A$, alors m est appelé le plus petit élément de A (noté : $min(A)$) et on a $min(A) = inf(A)$.

Exemple A.1. *Soit $A = [3,6[$ donc $sup(A) = 6$ et $inf(A) = 3$. Notons ici que $max(A)$ n'existe pas, par contre $min(A) = 3$.*

4. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure (resp. inférieure).

5. $\mathbb{R}$ est *Arshimedien* c-à-d :
   Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0,$ il existe $n \in \mathbb{N}$ qui satisfait $b \leq n.a$.

6. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c-à-d :

$$\forall a > b \in \mathbb{R}, \exists q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } a \leq q \leq b.$$

7. **Les intervalles**. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les différents types d'intervalles sur $\mathbb{R}$ sont :
   - $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$.
   - $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$.
   - $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$.
   - $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$.
   - $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < +\infty\}$.
   - $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < +\infty\}$.
   - $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}/-\infty < x \leq a\}$.
   - $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R}/-\infty < x < a\}$.

- $[a,a] = \{a\}$.

- $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$.

- **Définition :** Soient $a,r \in \mathbb{R}$ tel que $r > 0$. Toute partie de la forme $\{x \in \mathbb{R}/a-r < x < a+r\}$ ($\{x \in \mathbb{R}/a-r \leq x \leq a+r\}$) s'appelle un intervalle ouvert(resp. fermé) de centre a et de rayon r.

- **Remarque :** On appelle $a-b$ la longueur de tout intervalle borné de la forme $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ où $]a,b]$.

A.2 Les ouverts dans $\mathbb{R}$

Définition A.1. *Toute partie $O \subseteq \mathbb{R}$ est dite ouverte si et seulement si O est vide où vérifie : pour tout $x \in O$ il existe un intervalle ouvert I_x qui contient x. Autrement dit,*

$$\left\{\begin{array}{l} O = \phi \\ \text{où} \\ \forall x \in O, \exists\ I_x\ /\ x \in I_x \subseteq O \end{array}\right. \Leftrightarrow (O \textit{ est une partie ouverte}). \tag{A.1}$$

Exemple A.2.

1. *Tout intervalle ouvert est une partie ouverte.*

2. *$\mathbb{R}$ est ouvert.*

3. *Toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas ouverte car elle ne contient aucun intervalle ouvert.*

4. *$]-3,3[\bigcup]6,9[$ est une partie ouverte.*

5. *$\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ne sont pas des ouverts, car ils ne contiennent aucun intervalle ouvert.*

Proposition A.1. *Toute partie ouverte non vide de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts.*

Preuve. *Soit O une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}$. Alors, en utilisant (A.1) on obtient :*

$$O \subseteq \bigcup_{x \in O} I_x \subseteq O, \tag{A.2}$$

ce qui montre que

$$O = \bigcup_{x \in O} I_x. \tag{A.3}$$

Remarque A.2. *Dans ce cas on dit que l'ensemble des intervalles ouverts forme une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ définie comme suit :*

Définition A.2. *On appelle topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ la famille de ses parties ouvertes ou plus précisément la famille de parties de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui contient l'ensemble vide et tous les réunions d'intervalles ouverts. On note cette topologie par $|\,.\,|$ et on dit que le couple $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$ est un espace topologique.*

Si $\mathcal{T} = \{O_j : j \in J\}$ est la famille de parties ouvertes de $\mathbb{R}$, on peut montrer facilement qu'elle possède les propriétés suivantes :

A_1) $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{T}$.

A_2) $\bigcup\limits_{j \in J} O_j \in \mathcal{T}$, pour J fini ou infini.

A_3) $\bigcap\limits_{j \in J} O_j \in \mathcal{T}$, pour J fini.

En effet, la première propriété est évidente d'après (A.1). De plus, en utilisant (A.1) on obtient $O_j = \bigcup\limits_{\alpha \in L} I_{j,\alpha}$ ce qui nous permet d'écrire :

$$\bigcup_{j \in J} O_j = \bigcup_{j \in J} \Big(\bigcup_{\alpha \in L} I_{j,\alpha} \Big) = \bigcup_{(j,\alpha) \in J \times L} I_{j,\alpha}.$$

Donc, la deuxième propriété est vérifiée. En fin, on a :

$$\bigcap_{j \in J} O_j = \bigcap_{j \in J} \Big(\bigcup_{\alpha \in L} I_{j,\alpha} \Big) = \bigcup_{\alpha \in L} \Big(\bigcap_{j \in J} I_{j,\alpha} \Big).$$

Pour J fini, on remarque que $\bigcap\limits_{j \in J} I_{j,\alpha}$ est vide ou un intervalle ouvert. Donc, la troisième propriété est vérifiée.

Remarque A.3. *L'intersection infinie des ouverts de $\mathbb{R}$ n'est pas forcément un ouvert.*

Exemple A.3. *Soit $I_n = \left] -\frac{1}{n} + a, \frac{1}{n} + a \right[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors, on a $\bigcap\limits_{n>0} I_n = \{a\}$.*

A.3 Les fermés dans $\mathbb{R}$

Définition A.3. *On dit qu'une partie $F \subset \mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\complement_{\mathbb{R}} F$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$.*

Exemple A.4. *1. Toute partie finie de $\mathbb{R}$ est un fermée. En effet, on a*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \complement_{\mathbb{R}}\{a\} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[,$$

qui est une partie ouverte.

2. *Tout intervalle fermé est une partie fermée car*

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \complement_{\mathbb{R}}[a,b] =]-\infty,a[\cup]b,+\infty[,$$

   qui est une partie ouverte.

3. *On a :*
   - $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{N} =]-\infty,0[\cup(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}]n,n+1[)$,
   - $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$,
   - $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = \varnothing, \quad \complement_{\mathbb{R}}\varnothing = \mathbb{R}$,
   - $\complement_{\mathbb{R}}[a,+\infty[=]-\infty,a[$,
   - $\complement_{\mathbb{R}}]-\infty,a] =]a,+\infty[$,

   sont des ouverts donc $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\varnothing$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$ sont des fermés.

4. *$\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ne sont ni ouverts ni fermés dans $\mathbb{R}$ (car par construction de ce dernier, tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel et donc, ni $\mathbb{Q}$, ni $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ne peut-être la réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$).*

5. *Les intervalles de la forme $[a,b[$, $]a,b]$, tels que $a,b \in \mathbb{R}$, ne sont ni ouverts ni fermés dans $\mathbb{R}$.*

Remarque A.4. *Les seuls ouverts et férmés à la fois dans $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ et $\varnothing$.*

Si $\mathcal{F} = (F_j)_{j\in J}$ est la famille de parties fermées de $\mathbb{R}$ il découle directement, par complétude, que (voir définition A.2) :

1. $\mathbb{R}, \phi \in \mathcal{F}$.
2. $\bigcap\limits_{j\in J} F_j \in \mathcal{F}$, pour J fini ou infini.
3. $\bigcup\limits_{j\in J} F_j \in \mathcal{F}$, pour J fini.

Donc, la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ peut aussi bien être définie par la donnée de l'ensemble de ses ouverts que par la donnée de l'ensemble de ses fermés.

Remarque A.5. *L'union non finie des fermés de $\mathbb{R}$ n'est pas forcément un fermé de $\mathbb{R}$.*

Exemple A.5. *Soit $F_n = \left[-2+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right]$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, on a $\bigcup\limits_{n>0} F_n =]-2,2[$.*

A.4 Les voisinages dans $\mathbb{R}$

Définition A.4. *On dit qu'une partie V_x de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x dans $\mathbb{R}$ s'il existe un ouvert O_x de $\mathbb{R}$ vérifiant $x \in O_x \subseteq V_x$. On note par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*

On peut écrire la définition précédente sous la forme suivante :

$$V_x \text{ est un voisinage de x} \Leftrightarrow \exists\, O_x \in \mathcal{T} \;/\; x \in O_x \subseteq V_x, \tag{A.4}$$

et puisque O_x est une réunion d'intervalles ouverts on peut écrire aussi

$$V_x \text{ est un voisinage de x} \Leftrightarrow \exists\, r > 0 \;/\;]x-r, x+r[\, \subseteq V_x. \tag{A.5}$$

Proposition A.2. *O est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si O est un voisinage de chacun de ses points.*

Preuve. $\Longrightarrow$) *Évidente. (voir proposition (A.1)).*
$\Longleftarrow$) *Si O est un voisinage de chacun de ses points, alors pour tout $x \in O$, il existe un intervalle ouvert $I_x \subseteq O$ tel que $x \in I_x \subseteq O$ d'où $O \subseteq \bigcup_{x\in O} I_x \subseteq O$. Donc, $O = \bigcup_{x\in O} I_x$ ce qui montre que O est ouvert comme réunion d'ouverts.*

Nous déduisons de cette proposition que tout voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$ contient un autre voisinage de x qui est un intervalle ouvert. Dans ce cas, on dit que les intervalles ouverts qui contiennent x forment un système fondamental de voisinages (noté SFV) du point x.

Exemple A.6. *1. $\{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\;/\; \varepsilon > 0\}$ est un SFV de x.*

*2. $\left\{\left]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right[\;/\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est un SFV **dénombrable** de x.*

Proposition A.3. *Pour tout deux points distincts $x, y \in \mathbb{R}$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que : $V \bigcap W = \emptyset$.*

Preuve. *Supposons que $x < y$ et soit $|x-y| = r > 0$. Donc, il suffit de prendre par exemple $V = \left]x-\frac{r}{3}, x+\frac{r}{3}\right[$ et $W = \left]y-\frac{r}{3}, y+\frac{r}{3}\right[$.*

Cette proposition nous amène à la définition suivante :

Définition A.5. *$\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle $|.|$ est séparé.*

A.5 Points d'accumulation, points isolés

Définition A.6. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un point d'accumulation de A si et seulement si tout $V_x \in \mathcal{V}(x)$ contient au moins un point de A autre que x. Autrement dit,*

$$x \text{ un point d'accumulation de } A \Longleftrightarrow \forall\, V_x \in \mathcal{V}(x),\; (V_x - \{x\}) \bigcap A \neq \emptyset. \tag{A.6}$$

L'ensemble de tous les points d'accumulation de A est appelé l'ensemble dérivé de A et on le note par A'.

Exemple A.7. 1. *Si $A = [-5,9]$, alors $A' = [-5,9]$.*

2. *Si $A =]-3,7[$, alors $A' = [3,7]$.*
3. *Si $A =]-\infty,9[$, alors $A' =]-\infty,9]$.*
4. *Si $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$, alors $A' = \{0\}$.*
5. *Si $A = \{1,2,3,4,5\}$, alors $A' = \emptyset$.*

Remarque A.6. *Un point d'accumulation d'un ensemble A peut être dans A ou ne pas y être (voir l'exemple précédent).*

Proposition A.4. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Un point $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage de x contient une infinité de points de A.*

Preuve. *(Exercice)*

Proposition A.5. *Une partie A de $(\mathbb{R}, |.|)$ est fermée si et seulement si elle contient tous ses points d'accumulation.*

Preuve. *(Exercice)*

Définition A.7. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un point isolé de A s'il existe un voisinage $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tels que $V_x \cap A = \{x\}$. Autrement dit,*

$$x \text{ un point isolé de } A \Longleftrightarrow \exists\ V_x \in \mathcal{V}(x),\ (V_x) \bigcap A = \{x\}. \tag{A.7}$$

On dénote l'ensemble des points isolés par $Is(A)$.

Exemple A.8.

Si $A = \{1,2,3,4,5\}$, alors $Is(A) = A$.

Si $A = [-3,7] \cup \{9\}$, alors $Is(A) = \{9\}$.

Si $A = [5,9]$, alors $Is(A) = \emptyset$.

Si $A = \mathbb{N}$, alors $Is(A) = \mathbb{N}$.

A.6 Principe de Cantor des intervalles emboîté

Définition A.8. *Soit la suite d'intervalles $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ tels que*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{A.8}$$

On dit que cette suite est emboîtée.

Lemme A.1. *L'intersection de toute suite d'intervalles fermés et emboîtés n'est pas vide.*

Preuve. *Soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles fermés et emboîtés. On considère les deux ensembles suivants :*

$$A = \{a_0,a_1,...,a_n,...\}, B = \{b_0,b_1,...,b_n,...\}.$$

Puisque $I_{n+1} \subset I_n$ *on conclut que :*

$$a_n \le sup(A) \le inf(B) \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{A.9}$$

Donc, l'intervalle $[sup(A),inf(B)]$ *qui peut être dégénéré est inclus dans tout intervalle* I_n *d'où* $[sup(A),inf(B)] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *ce qui signifie que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \ne \phi$.

Lemme A.2. *Soit* $F = \{[a_i,b_i]: \quad i \in I\}$ *une famille d'intervalles fermés et emboités . Alors, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists i \in I \ tel\ que \ |b_i - a_i| < \varepsilon \Longleftrightarrow \bigcap_{i\in I}[a_i,b_i] = \{c\},\ c \in \mathbb{R}. \tag{A.10}$$

Preuve. $\Longrightarrow$) *Supposons que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $i \in I$ *tel que* $|b_i - a_i| < \varepsilon$. *D'après la proposition précédente on a vu que* $[\sup_{i\in I}(a_i), \inf_{i\in I}(b_i)] = \bigcap_{i\in I}[a_i,b_i]$. *Donc, si* $\sup_{i\in I}(a_i) = \inf_{i\in I}(b_i)$ *le résultat est vérifié. Sinon, on a l'inégalité suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ |\sup_{i\in I}(a_i) - \inf_{i\in I}(b_i)| < \varepsilon,$$

d'où le résultat est aussi vérifié.

$\Longleftarrow$) *Soit* $\varepsilon > 0$. *Alors, il existent* $[a_i,b_i],[a_j,b_j] \in F$ *tels que* $a_j > \sup_{j\in I}(a_j) - \frac{\varepsilon}{2}$ *et* $b_i < \inf_{i\in I}(b_i) + \frac{\varepsilon}{2}$. *Donc, si par exemple* $[a_i,b_i] \subset [a_j,b_j]$ *on obtient*

$$a_i \ge a_j > \sup_{j\in I}(a_j) - \frac{\varepsilon}{2} \ et \ b_i < \inf_{i\in I}(b_i) + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où pour $\sup_{i\in I}(a_i) = \inf_{i\in I}(b_i)$ *on a le résultat suivant :*

$$b_i - a_i < \varepsilon, \tag{A.11}$$

ce qui termine la démonstration du lemme (A.2).

Lemme A.3. *Toute suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ *est convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy. Puisque toute suite de Cauchy est bornée on pose

$$b_m = \underset{n \geq m}{sup}(x_n) \quad \text{et} \quad a_m = \underset{n \geq m}{inf}(x_n).$$

Il est claire que $a_m \leq a_{m+1}$ et $b_m \geq b_{m+1}$ pour tout m, d'où on conclut que :

$$[a_{m+1}, b_{m+1}] \subset [a_m, b_m].$$

Donc, le lemme (A.2) nous assure l'existence d'un élément unique $C \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap\limits_{m \geq 0} [a_m, b_m] = \{C\}$.

Montrons maintenant que :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = C.$$

Puisque la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq N \Longrightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour $m = N$ et $n \geq N$ on aura :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Longrightarrow |x_n - x_N| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'inégalité précédente est vérifiée pour les deux éléments a_N et b_N c-à-d :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad x_N - a_N < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad b_N - x_N < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En fin, puisque $C \in [a_N, b_N]$ en utilisant ces deux inégalités on obtient :

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - C| \leq b_N - a_N = b_N - x_N + x_N - a_N < \varepsilon. \tag{A.12}$$

d'où

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = C.$$

□

Remarque A.7. *La propriété qu'on a vu dans le lemme précédent nous permet de dire que* $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un espace complet.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki. *Topologie générale, Chapitres 1 à 4.* Hermann, Paris, 1971.

[2] G. Choquet. *Cours d'analyse, tome II, Topologie.* Masson, Paris, 1964.

[3] G. Christol. *Topologie.* Ellipses, 1997.

[4] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse, tome I : fondements de l'analyse moderne.* Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[5] J. Dixmier. *Topologie générale.* Presses universitaires de France, 1981.

[6] F. Nier, D. Iftimie. *Introduction à la Topologie.* Université de Rennes 1.