

Année Académique : 2022 – 2023**TRAVAUX DIRIGES DE STATISTIQUE INFERENTIELLE****(Fiche n°1)****Exercice 1**

Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction f définit une densité de probabilité et si oui, déterminer la fonction de répartition associée à cette densité.

$$1) f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{4 \ln(x)}{x^3}, & \text{si } x \geq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2

Trois groupes de fonctionnaires ont fait l'objet d'une notation. Les fonctionnaires de chaque groupe ont été notés par un noteur. Les résultats sont donnés dans les tableaux ci-dessous (la note maximale théorique est 40).

Les fonctionnaires sont désignés A,B,C....W.

Groupe 1 Premier noteur						
A	B	C	D	E	F	G
38	36	36	34	34	34	33

Groupe 2 Deuxième noteur						
H	J	K	L	M	N	P
38	37	36	36	35	33	30

Groupe 3 Troisième noteur					
Q	R	S	T	V	W
36	35	35	33	33	32

1) Calculer la moyenne m_1 et l'écart type s_1 de la distribution statistique des sept notes attribuées par le premier noteur.

Les détails des calculs ne sont pas demandés. L'écart type sera arrondi au millièème.

2) Indiquer de même (le détail des calculs n'est pas demandé) : la moyenne m_2 et l'écart type s_2 de la distribution des sept notes attribuées par le deuxième notateur.

la moyenne m_3 et l'écart type s_3 de la distribution des six notes attribuées par le troisième notateur.

la moyenne $\bar{m}$ et l'écart type $\bar{s}$ de la distribution des 20 notes.

3) En vue d'une promotion, qui bénéficiera à 8 des 20 fonctionnaires concernés, on procède à une harmonisation des notes selon la formule :

$$\bar{n} = \bar{m} + \left(\frac{n - m_i}{s_i} \right) \times \bar{s}$$

dans laquelle n désigne la note initialement attribuée à un fonctionnaire, $\bar{n}$ sa note harmonisée, et i l'indice du groupe auquel ce fonctionnaire appartient.

Présenter dans un tableau la distribution des notes harmonisées et donner les noms des promus.

Exercice 3

On place une souris dans une cage. Elle se trouve face à 4 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, la souris reçoit une décharge électrique et on la replace à l'endroit initial. On suppose que la souris mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'elle n'a pas encore essayés.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'essais pour sortir de la cage.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X . Reconnaître la loi.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0, 1.

On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un stylo avec un défaut ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de deux stylos avec un défaut ?

Exercice 5

Un certain matériel a une probabilité $p = 0, 02$ de défaillance à chaque mise en service.

On procède à l'expérience suivante, l'appareil est mis en marche, arrêté, remis en marche, arrêté, jusqu'à ce qu'il tombe en panne.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la panne.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

2. Quelle est la probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai ?

Exercice 6

On suppose que sur 1000 personnes voyageant par train à un instant donné, il y a en moyenne 1 médecin. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de médecins dans le train.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

2. Quelle est la probabilité de trouver :

(a) Aucun médecin.

(b) Entre 2 et 4 médecins.

(c) Au moins deux médecins.

Exercice 7

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. On examine n pièces choisies au hasard et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses.

I. Après un premier réglage, on constate une proportion de 30% de pièces défectueuses.

Pour $n = 5$:

1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Calculer son espérance et son écart-type.

2) Quelle est la probabilité que deux pièces soient défectueuses ?

3) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?

4) Déterminer la valeur de X la plus probable. Calculer la probabilité associée.

II. Après un second réglage, la proportion des pièces défectueuses devient 5%.

Pour $n = 100$:

1) Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifiez votre réponse.

2) Calculer la probabilité de ne pas trouver de pièces défectueuses.

3) Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses.

4) Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit compris entre 2 et 4.

Exercice 8

Une variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

1) Trouvez le paramètre de cette loi sachant que $p(T \leq 70) = 0,05$

2) Déduisez-en $p(T > 30)$

Exercice 9

La durée de vie en années d'un ordinateur est une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, déterminer la valeur de λ .

2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Exercice 10

La distance (en mètres) parcourue par un projectile suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- La probabilité qu'un projectile dépasse 60 mètres est 0,0869.
- La probabilité qu'un projectile parcourt une distance inférieure à 45 mètres est 0,6406.

Calculer la distance moyenne parcourue par un projectile, ainsi que l'écart-type de celle-ci.

Exercice 11

Une enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes en vue de connaître leur consommation de lait sur 1 mois. On suppose que sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation a une distribution de type "Normale" avec une moyenne de 20 litres et un écart-type de 5 litres. Dans le cadre d'une campagne publicitaire, on souhaite connaître :

1. Le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois)
2. Le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois).
3. La consommation maximale de 50% des consommateurs.
4. Au-dessus de quelle consommation se trouvent 33% des consommateurs.

Exercice 12

Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit la loi exponentielle de paramètre $= \frac{1}{2}$.

- 1) Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède deux heures ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins dix heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé neuf heures ?

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire de loi normale d'espérance m inconnue et de variance $\sigma^2 = 4$. On dispose de l'échantillon suivant tiré de X :

-1,2 ; 1,7 ; 1,3 ; 1,5 ; 2,0 ; -1,5 ; 1,6 ; -2,1 ; 1,3 ; 3,3.

1. Calculer la moyenne et la variance de l'échantillon.
2. On propose deux estimateurs de m : $\hat{m}_1 = \bar{x}$ (la moyenne de l'échantillon) et $\hat{m}_2 = x_1$ (la première observation). Montrez que $\hat{m}_1$ et $\hat{m}_2$ sont des estimateurs non-biaisés de m.
3. Calculez la variance de ces deux estimateurs.
4. Peut-on conclure quel estimateur est meilleur, $\hat{m}_1$ ou $\hat{m}_2$? Expliquer.

5. Supposons que $m = 1$. Calculer $P(X > 0)$.

Exercice 14

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$, une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p , deux à deux indépendantes. On introduit pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$ les variables aléatoires :

$$Y_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2} \text{ et } T_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}$$

1. Déterminez la loi de Y_n : quelles valeurs peut prendre Y_n ? donnez la distribution de probabilité de Y_n et calculez son espérance et sa variance.
2. Calculez l'espérance et la variance de T_n . (Attention, les Y_i ne sont pas indépendantes)

Exercice 15

Pour se rendre à son travail un employé peut prendre deux routes. Par la route N° 1, il met 27 minutes en moyenne avec un écart type de 2,5 (2 minutes et 30 secondes). Par la route N° 2 il met 29 minutes en moyenne avec un écart-type de 1 minute. Dans les deux situations la durée des trajets suit une loi normale. L'employé choisit systématiquement d'emprunter la route par laquelle la probabilité d'arriver à l'heure est la plus forte.

Quelle est la route qu'il choisira pour se rendre au travail :

1. s'il dispose de 28 minutes?
2. s'il dispose de 32 minutes?

Exercice 16

Un parc d'attraction propose à son public un tout nouveau grand huit. À cette occasion, le service d'études statistiques du parc a étudié différentes caractéristiques sur ses clients. Le parc est ouvert de 10h à 19h et son parking de 9h30 à 19h30. La durée de stationnement d'une voiture sur le parking du parc est représentée par une variable aléatoire continue de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25} & (x - 5) \text{ si } 5 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les huit premières heures de stationnement sont gratuites, les heures supplémentaires sont facturées à un tarif unique : t par heure. Toute heure commencée est due entièrement. On note

M la variable aléatoire représentant le montant dépensé pour une voiture pour le stationnement au parc.

1. Quel est le temps moyen qu'une voiture reste garée ?
2. Quelle est la probabilité qu'une voiture reste moins de 8h garée sur le parking ?
3. Quelle est la probabilité qu'une voiture reste garée plus de 9h sur le parking ?
4. Donner les valeurs possibles de M. Exprimer la loi de M.
5. Quel est le tarif t de l'heure supplémentaire qui doit être fixé si la gestionnaire souhaite que le prix moyen du stationnement soit de 3 euros ?