Université de Yaoundé I
Faculyté des Sciences
Département de Mathématiques

Réublique du Cameroun
Paix-Travail-Patrie

Année Académique 2024/2025
Travaux dirigés N1 MAT 131 : Éléments d'Analyse pour Informaticiens
Filière : Informatiques

Exercice 1

1. Donner l'ensemble des majorants et l'ensemble de minorants dans $\mathbb{R}$ de chacun des cas suivants :
   (a) $A =]0,1[\bigcap \mathbb{Q}$
   (b) $B = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n^2}\right\}$
2. Donner des exemples de sous-ensembles A de $\mathbb{R}$ tels que :
   (a) $\max A$ et $\sup A$ existent ;
   (b) $\max A$ n'existe pas et $\sup A$ existe
   (c) Reprendre les mêmes questions pour $\min A$ et $\inf A$
3. le maximum de deux nombres réels x et y est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des nombres x et y.
   (a) Montrer que le $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$
   (b) En déduire une formule pour $\max(x,y,z)$

Exercice 2

Soient A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \left\{a + b,\ a \in A,\ b \in B\right\}$$

1. On suppose a et B majorés. Montrer que $A + B$ est majoré et que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
2. On suppose A et B minorés. Montrer que $A + B$ est minoré et que $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.
3. On pose $-A = \left\{-a,\ a \in A\right\}$. Montrer que si A est borné alors $-A$ est aussi borné et que l'on a $\inf(-A) = -\sup A$; $\sup(-A) = -\inf A$.
4. On suppose A et B majorés. Montrer que $A \cup B$ est majoré et que $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.
5. On suppose A et B minoré. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cap B$ est aussi minoré et comparer $\inf(A \cap B)$ et $\inf\{\inf A, \inf B\}$. On montrera que $\inf\{\inf A, \inf B\} \leqslant \sup\{\inf A, \inf B\} \leqslant \inf(A \cap B)$.
   Montrer sur un exemple que l'on peut avoir

$$\inf\{\inf A, \inf B\} < \inf(A \cap B).$$

6. On suppose $A,\ B \subset \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$ et on pose $AB = \{ab,\ a \in A \,\text{et}\, b \in B\}$. Montrer que si A et B sont majorés , alors AB est majoré et on a $\sup AB = \sup A \times \sup B$.

Exercice 3

1. Soient E l'ensemble des réels x qui s'écrivent sous la forme $x = p + q\sqrt{2}$ avec p et q des entiers relatifs et $u = \sqrt{2} - 1$
2. Montrer par récurrence que l'on a $u^n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. Déterminer l'intersection $E \cap \mathbb{Q}$ (On rappelle que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel)

Exercice 4

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur exacte du nombre F défini par $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4 + 1}$

1. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$
   $4a^4 + b^4 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2)$ (identité de Sophie Germaine)
2. En déduire une expression simplifiée de F.

Exercice 5 :

On considère le système différentiel

1. Montrer que $x = 31,72356356\cdots$ est un rationnel.
2. Enoncer la propriété d'Archimède.
3. Soient a et b deux réels tels que $a > 0$ et $b \geqslant 0$. En utilisant la propriété d'Archimède, montrer que l'ensemble $S = \{n \in \mathbb{N}, an > b\}$ est non vide et admet un plus petit élément que l'on notera p.
4. On pose $r = b - (p-1)a$. Montrer que $r < a$.
5. En déduire que $\forall x > 0$ et $\forall y > 0$, $\exists (q, r) \in \mathbb{N} \times [0, x[$ tels que $y = qx + r$.

Exercice 6

1. Définir les termes suivants :
   a) Majorant , b) Minorant, c) Borne Supérieure et d) Borne Inférieure.
2. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que :
   (a) $A \subset B \Longrightarrow \sup A \leqslant \sup B$.
   (b) $A \subset B \Longrightarrow \inf B \leqslant \inf A$.
3. On pose $X = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
   (a) Montrer que X est minoré et majoré.
   (b) Montrer que X admet admet un plus petit élément et le déterminer.
   (c) Montrer que X admet une borne supérieure et le déterminer.

Exercice 7 :

1. Soit $X = \left\{ \dfrac{3n}{4n+3};\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

(a) Montrer que X est minoré et majoré.

(b) En déduire que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

2. Donner l'ensemble des majorants dans $\mathbb{Z}$ de $C =]-1, 1[\cap \mathbb{N}$.

3. Définir les termes suivants :
a) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}$ est archimedien. c) A n'est pas une partie minoré.

Exercice 8 :

Soit I le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $I = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2\right\}$.

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles que l'on déterminera.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grang élément, le plus petit élélement de ces intervalles.

Exercice 9 :

Soit $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \,\text{et}\, x^2 < 2\right\}$.

1. Montrer que A est une partie non vide et majorée dans $\mathbb{Q}$.
2. Soit $r \in A$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(2 - r^2) > 2r + 1$. En déduire que $r' = r + \frac{1}{n} \in A$.
3. Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A. Montrer que $M > \sqrt{2}$.
4. En déduire que $Sup\, A \notin \mathbb{Q}$

Exercice 10 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
(i) $\frac{x}{2} + 1 = \sqrt{|1 - x^2|}$ (ii) $\frac{x}{2} + 1 \leqslant \sqrt{|1 - x^2|}$ (iii) $\frac{x}{2} + 1 > \sqrt{|1 - x^2|}$
2. (a) $x - 1 \leqslant |1 - x^2|$ (b) $|x - 1| \leqslant 1 - x^2$

Exercice 11 : Autour des valeurs absolues

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $-3x^2 + 17x - 14 = 0$
2. $-3x^2 + 17x - 14 < 0$
3. $(m - 1)x^2 + mx - 2m + 1 = 0$ (discuter suivant le paramètre m.
4. $(m - 1)x^2 + mx - 2m + 1 < 0$

Exercice 12 :

1. Soient x et y deux réels. Démontrer les égalités et inégalités suivantes
   (a) $E(x + 1) = E(x) + 1$,
   (b) $E(x) + E(y) \leqslant E(x + y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$,
   (c) $E(x) + E(y) + E(x + y) \leqslant E(2x) + E(2y)$,
   (d) $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x)$.
2. Soit x un nombre réel quelconque. Donner la définition de la partie entière de x, notée $E(x)$.
3. Montrer qu'il existe un entier $N > 0$ tel que : $x - N < E(x) \leqslant x; \forall x \in \mathbb{R}$.

4. En utilisant la question précédente ; montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, 1$, on a

$$\left(\frac{E(x)}{x}\right)^2 \leqslant \frac{E(x)}{x} \quad et \quad \left(\frac{E(x)}{x-1}\right)^2 > \frac{E(x)}{x-1}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $E\left(\frac{E(kx)}{k}\right)$; $\quad k \in \mathbb{N}^*$

Exercice 13 : Autour des valeurs absolues

1. Soient x et y deux réels. Démontrer les inégalités suivantes
   (a) $|x| - |y| \leqslant |x - y|$.
   (b) $|x| + |y| \leqslant |x + y| + |x - y|$.
   (c) $1 + |xy - 1| \leqslant (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.
   (d) $||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}$$

   Montrer que quels que soient x et y, on a $A(x + y) \leqslant A(x) + A(y)$.
3. Montrer que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.