

Mardi , 02 Octobre 2024

chap 1 : RAPPELS SUR LA CROISSANCE EXOGENE ET SUR QUELQUES NOTIONS MATHÉMATIQUES

I - LA CROISSANCE EXOGENE

1 - les hypothèses

Ce modèle démontre que la croissance est déterminée par des facteurs qui ne peuvent pas être déterminés par des $pô$ économiques, en occurrence le progrès technique noté (A) et la croissance démographique noté (n) . Pour le démontrer, nous allons supposer que la fonction de production a-trois (3) variables à savoir :

le Capital (K)

le travail (N)

le Progrès technique (A)

- le progrès technique est neutre

au sens de Harrod c'est à dire le progrès technique économique le travail $y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ et au sens de Hicks économisée la fonction de production est : $y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ sans de ~~soluto~~ qui équilibre le travail, on aura $y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$

- On suppose que la croissance démographique est exogène et soit au taux $n = \frac{dL_t}{L_t}$, supposons que la technologie est aussi exogène, on aura : $\gamma_A = \frac{dA_t}{A_t}$

On suppose que la accumulation du capital est financée par ~~les~~ épargne et qu'il existe un taux de dépréciation du capital noté δ (8) on aura :

$$\frac{dK_t}{dt} = \delta F(K_t, A_t L_t) - \delta K_t$$

- Par définition le capital par unité effectif est noté $\bar{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$

2 - Equation fondamentale de solow

Il s'agit l'équation fondamentale de solow qui considère que le progrès technique est neutre au sens ~~de~~ Harrod on aura :

$$y_t = F(K_t, A_t L_t)$$

$$\text{soit } \bar{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$$

En linéarisant on a :

$$\ln \bar{k}_t = \ln \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)$$

$$\Rightarrow \ln \bar{k}_t = \ln K_t + \ln A_t - \ln L_t$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln \bar{k}_t}{d t} = \frac{d \ln K_t}{d t} - \frac{d \ln A_t}{d t} - \frac{d \ln L_t}{d t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar{k}_t} \frac{d \bar{k}_t}{d t} = \frac{1}{K_t} \frac{d K_t}{d t} - \frac{1}{A_t} \frac{d A_t}{d t} - \frac{1}{L_t} \frac{d L_t}{d t}$$

$$\frac{dk_t}{dt} = \frac{1}{k_t} (sf(k_t + A_t L_t) - \delta k_t - (n+g_A)k_t)$$

$$\Rightarrow \frac{dk_t}{dt} = \frac{1}{k_t} (sf(k_t, A_t L_t) - \delta k_t - (n+g_A)k_t)$$

$$= \frac{1}{k_t} (sf(k_t, A_t L_t) - \delta k_t) - (n+g_A)$$

$$\frac{dk_t}{dt} = \frac{sf(k_t, A_t L_t) - \delta k_t - (n+g_A)k_t}{k_t}$$

$$\Rightarrow \frac{dk_t}{dt} = \frac{sf(k_t, A_t L_t)}{A_t L_t} - (n+g_A + \delta)$$

$$f(k_t) = \frac{F(k_t, A_t L_t)}{A_t L_t}$$

$$\Rightarrow \frac{dk_t}{dt} = \frac{df(k_t)}{dt} - (n+g_A + \delta)k_t$$

$\frac{dk_t}{dt}$ représente la dynamique du capital, c'est-à-dire l'évolution du taux de croissance du capital. De 0 à k_t^* , l'investissement courant ($sf(k_t)$) est supérieur à l'investissement de point mont c'est-à-dire $(n+g_A)k_t$. Le dernier terme représente le niveau d'investissement qu'il faut pour maintenir k_t constant.

Avant K^* l'économie accumule plus du capital physique par rapport à la force de travail effective ($A_t L_t$) augmentée par le taux de dépréciation du capital.

Le taux de croissance du capital est donc > 0 comme en témoigne le 2^{ème} graphique.

À droite de K^* et en raison de la substitution entre le capital K devenu relativement abondant et la travail effectif devenu relativement rare et par conséquent le prix du travail est relativement élevé, les entreprises vont augmenter le travail effectif et par conséquent le capital par unité de travail effectif va diminuer $K_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$ par conséquent le taux de croissance de K_t devient négatif.

Exercice

Soit la fonction Cobb-Douglas suivante $F(K_t, A_t L_t) = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$.

1. Démontrerez que la croissance est hexogène en supposant que le capital et la production croissent au même taux et en considérant les hypothèses sur le progrès technique et le travail.

2. Calculez à l'état stationnaire et en considérant l'équation fondamentale de Solow ce dernier établit le capital par unité de travail effectif k_t , la production par unité de travail effectif $f(k_t)$.

3. Démontrerez que après avoir expliqué la problématique de la règle d'or que le taux d'épargne qui maximise la consommation par tête = à l'élasticité de la production par rapport au facteur capital.

4. Démontrerez que la fonction CES est une Cobb-Douglas

si la

est re-

gative, c.à-

d les pays

p

5- Calculez la vitesse de croissance

Solution:

$$1 - Q_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

On va démontrer que le taux de croissance de Q_t par des facteurs qui sont purement exogènes, de là fait on va linéariser l'équation et dériver par rapport au temps.

* En linéarisant on a

$$\ln Q_t = \ln [K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}]$$

$$\Rightarrow \ln Q_t = \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln(A_t L_t)$$

$$\Rightarrow \ln Q_t = \alpha \ln K_t + (1-\alpha)(\ln A_t + \ln L_t)$$

On a donc:

$$\frac{d \ln Q_t}{dt} = \alpha \frac{d \ln K_t}{dt} + (1-\alpha) \left(\frac{d \ln A_t}{dt} + \frac{d \ln L_t}{dt} \right)$$

$$\left(\frac{d \ln A_t}{dt} + \frac{d \ln L_t}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Q_t} \frac{dQ_t}{dt} = \alpha \frac{1}{K_t} \frac{dK_t}{dt} + (1-\alpha)(n + g_A)$$

$$\text{si } g_K = \frac{1}{K} \frac{dK}{dt} = g_K = \frac{1}{K} \frac{dK}{dt}$$

$$\Rightarrow g_Q = \alpha g_K + (1-\alpha)(n + g_A)$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)g_K = (1-\alpha)(n + g_A)$$

$$\Rightarrow g_K = n + g_A$$

On trouve que la croissance est fonction de deux (2) facteurs exogènes à savoir le taux de croissance démographique (n) et la croissance du progrès technique g_A . On peut aussi démographiquement montrer que $n + g_A$ est le taux de croissance du travail effectif qui est égale au taux de ~~travail~~ croissance du ~~la~~ produit et du travail.

Dans le modèle de Solow, les principales variables croissent au même taux, on dit que la croissance dans le modèle néoclassique est équilibrée.

$$2 - \text{Soit } \frac{dK}{dt} = s f(K_t) - (n + g_A + \delta) K_t$$

à l'état stationnaire: $\frac{dk_t}{dt} = 0$

$$\frac{dk_t}{dt} = 0 \Rightarrow sf(k_t) - (n+g+s)k_t = 0$$

$$f(k_t) = \frac{C_t}{A_t L_t} = \frac{K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}}{A_t L_t}$$

$$f(k_t) = \left(\frac{k_t}{A_t L_t} \right)^\alpha = \bar{k}^\alpha \text{ avec } \bar{k} = \frac{K_t}{A_t L_t}$$

On a donc

$$\frac{s}{n+g_A+s} = \bar{k}^{1-\alpha}$$

$$\bar{k} = \left(\frac{s}{n+g_A+s} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

On sait $f(k_t) = \bar{k}^\alpha$

$$\Rightarrow f(k_t) = \left(\frac{s}{n+g_A+s} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

3 - La problématique de la répartition du revenu consiste à trouver une juste répartition du revenu optimal

entre la consommation et l'épargne de sorte que la consommation par tête soit toujours optimale dans le temps. C-à-d le taux d'épargne à l'élasticité de la production par rapport au capital.

$$\text{Soit } s = \frac{(n+g_A+s)k_t}{f(k_t)}$$

$$\frac{C}{K_t L_t} = f(k_t) - sf(k_t) = f(k_t) - (n+g_A+s)k_t$$

$$\text{Soit } c_t = \frac{C_t}{A_t L_t}$$

$$\Rightarrow \frac{dc_t}{dk_t} = f'(k_t) - (n+g_A+s)$$

$$\frac{dc_t}{dk_t} = 0 \Leftrightarrow f'(k_t) = (n+g_A+s)$$

$$\Rightarrow s = \frac{(n+g_A+s)k_t}{f(k_t)} \Rightarrow s = \frac{f'(k_t) \cdot k_t}{f(k_t)}$$

$$\Rightarrow f'(k_t) = \alpha k_t^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\alpha R^{\alpha-1} \cdot R_t}{R_t^\alpha} = \alpha$$

$$4 - Q = (a k^e + b l^e)^{\frac{1}{e}} \quad a+b=1$$

tr. divisant on a :

$$e \rightarrow \infty \quad \ln Q = \frac{1}{e} \ln (a k^e + b l^e)$$

$$\lim_{e \rightarrow \infty} \ln Q = F.O.I.$$

$$e \rightarrow 0$$

Appliquons le theoreme de hospital

$$\frac{d \log Q}{de} \lim_{e \rightarrow 0} \left(\frac{d(d \log(a k^e + b l^e))}{de} \right)$$

$$\frac{d \log Q}{de} \lim_{e \rightarrow 0} \frac{d(a k^e + b l^e)}{d k^e + b l^e} = \frac{a d k}{a k^e + b l^e} + \frac{b d l}{d e}$$

$$\frac{d k^e}{de} = \frac{d(e^{\ln k})}{de} = \ln k e^{\ln k} = k^e \ln k$$

$$\frac{d \log Q}{de} \lim_{e \rightarrow 0} \left(\frac{a k^e \ln k + b l^e \ln l}{a k^e + b l^e} \right)$$

$$= \frac{a \ln k + b \ln l}{a+b} = a \ln k + b \ln l = \ln k^a + \ln l^b$$

$$\Rightarrow \ln Q = \ln (k^a l^b)$$

$$\Rightarrow X = k^a l^b, \quad a+b=1$$

$$5 - \frac{d R_t}{dt} = \beta f(R_t) - (n + g_A + \delta) R_t$$

$$V_C = d \left(\frac{d R_t}{dt} \right) / \frac{d R_t}{dt}$$

$$V_C = \beta f'(R_t) - (n + g_A + \delta) \quad \text{or} \quad f'(R_t) = (n + g_A + \delta)$$

$$V_C = \beta (n + g_A + \delta) - (n + g_A + \delta) = (n + g_A + \delta)(\beta - 1)$$

$$V_C < 0$$

$$\beta < 1$$

Si on dit selon le modèle de Solow, les pays de que la pauvreté vont rattraper les pays convergences seules pour 2 raisons:
 - les progrès techniques sont
 On doit se considérer comme un bien public
 perdue sur C. a. d. une main qui tombe
 et non du ciel, tous pays peuvent bénéficier
 - le Capital est faible dans les
 pays en développement et la produc-
 + entre ac-tivité du Capital est élevée dans
 tique de les P.E.D en raison de la loi
 Lucas et sur la décroissance des rendements
 paradoxe En réalité, la convergence n'est
 de Lucas observée que si les pays candidats
 partagent la même fonction de
 production.

II - RAPPELS MATHÉMATIQUES

EXERCICE

soit K ou Capital par tête
 $k = \frac{K}{L}$ et $f(k)$ ou la production

par tête $f(k) = F(K, L)$ en d'autre
 terme $F(K, L) = L f(k)$
 1- Calculer $f'(k)$ et F_L
 2- Soit $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, Vérifier
 le théorème d'Euler.

Solution

$$1- F(K, L) = L f(k), \quad f(k) = \frac{K}{L}$$

$$* F'_K = L \frac{\partial f(k)}{\partial k} \cdot \frac{dk}{dK} = L f'(k) \frac{1}{L} = f'(k)$$

$$\begin{aligned} * F'_L &= \frac{\partial}{\partial L} f(k) + L \frac{\partial f(k)}{\partial k} \cdot \frac{dk}{dL} \\ &= f(k) - L f'(k) \left(\frac{1}{L^2} K \right) \\ &= f(k) - \frac{K f'(k)}{L} \\ &= f(k) - k f'(k) \end{aligned}$$

Si la fonction
 est homogène
 la fonction
 est épuisée
 lorsque les

2- Vérifions le théorème d'Euler
 $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$
 Démontrons que la masse product-
 est séparée entre la masse sala-

mais à la suite de ces propositions du Capital
réalisation vérifions que $F(k, l) = F'_k k + F'_l l$
sont réunies.

$$F(k, l) = k^\alpha l^{1-\alpha}$$

$$F'_k = \frac{\partial F(k, l)}{\partial k} = \alpha k^{\alpha-1} l^{1-\alpha}$$

$$F'_l = \frac{\partial F(k, l)}{\partial l} = (1-\alpha) k^\alpha l^{-\alpha}$$

$$F'_k k + F'_l l = \alpha k^\alpha l^{1-\alpha} + (1-\alpha) k^\alpha l^{1-\alpha}$$

$$= k^\alpha l^{1-\alpha} [\alpha + 1 - \alpha] = k^\alpha l^{1-\alpha}$$

Donc $F'_k k + F'_l l = F(k, l)$

III - RAPPELS SUR LA FONCTION DE RAMSEY

Exemple d'application

On considère un individu qui
a pour fonction d'utilité :

$$U(c_t) = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t)$$

avec $U(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta}$

la contrainte budgétaire de cet in-
dividu est

la contrainte sur l'accumulation du
capital est donnée par la fonction
suivante :

$$\frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - c_t - \delta k_t$$

- 1 - Que représente ρ et θ ?
- 2 - Calculer la dynamique de la
consommation et du capital
- 3 - Représenter chaque dynamique
dans un diagramme
- 4 - Deduire le diagramme de phase

Solution :

1 - ρ est le taux de préférence pour le présent et σ l'aversion pour le risque.

$$\rho = -\frac{C(U'')}{U'}$$

$$U = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$U' = C^{-\sigma}$$

$$U'' = -\sigma C^{-(1+\sigma)}$$

$$\begin{aligned} \frac{-C(U'')}{U'} &= \frac{-C \cdot \sigma C^{-(1+\sigma)}}{C^{-\sigma}} \\ &= \frac{\sigma C C^{-1-\sigma}}{C^{-\sigma}} = \frac{\sigma C^{-1-\sigma+1}}{C^{-\sigma}} = \frac{\sigma C^{-\sigma}}{C^{-\sigma}} \end{aligned}$$

Donc $\frac{-C(U'')}{U'} = \sigma$

2 - Soit H le hamiltonien associé à ce programme.

$$H = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt + \lambda_t [f(c_t) - c_t - \delta k_t]$$

$$\delta k_t] - \frac{dk_t}{dt}]$$

C. P. D

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow e^{-\rho t} u'(c_t) - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\frac{dk_t}{dt} \Leftrightarrow \lambda_t (f'(c_t) - \delta) = -\frac{d\lambda_t}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \frac{dk_t}{dt} = f(c_t) - c_t - \delta k_t \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int e^{-\rho t} k_t = 0$$

$$e^{-\rho t} u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\Rightarrow -\rho + \ln u'(c_t) = \ln \lambda_t$$

$$\Rightarrow -\rho + \frac{\partial \ln u'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial c_t} \frac{dc_t}{dt} = \frac{\partial \ln \lambda_t}{\partial \lambda_t} \frac{d\lambda_t}{dt}$$

$$\Rightarrow -\rho + \frac{1}{u'} \cdot u'' \frac{dc_t}{dt} = \frac{1}{\lambda_t} \frac{d\lambda_t}{dt}$$

$$\text{or } f'(c_t) - \delta = -\frac{1}{\lambda_t} \frac{d\lambda_t}{dt}$$

$$\Rightarrow -\rho + \frac{u''}{u'} \frac{dc_t}{dt} = -[f'(c_t) - \delta]$$

$$\Rightarrow \frac{U''}{U'} \frac{dc}{dt} = -f'(k_t) + \delta + e$$

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{U'}{U''} [-f'(k_t) + \delta + e]$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{U'}{U''} [f'(k_t) - (\delta + e)]$$

$$U' = C^{-\theta} \quad U'' = -\theta C^{-\theta-1}$$

$$\frac{U'}{U''} = \frac{C^{-\theta}}{-\theta C^{-\theta-1}} = -\frac{1}{\theta} C$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt} = \frac{C}{\theta} [f'(k_t) - (\delta + e)]$$

$$\frac{dc}{C dt} = \frac{1}{\theta} [f'(k_t) - (\delta + e)]$$

$$3 - \frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - c_t - \delta k_t$$

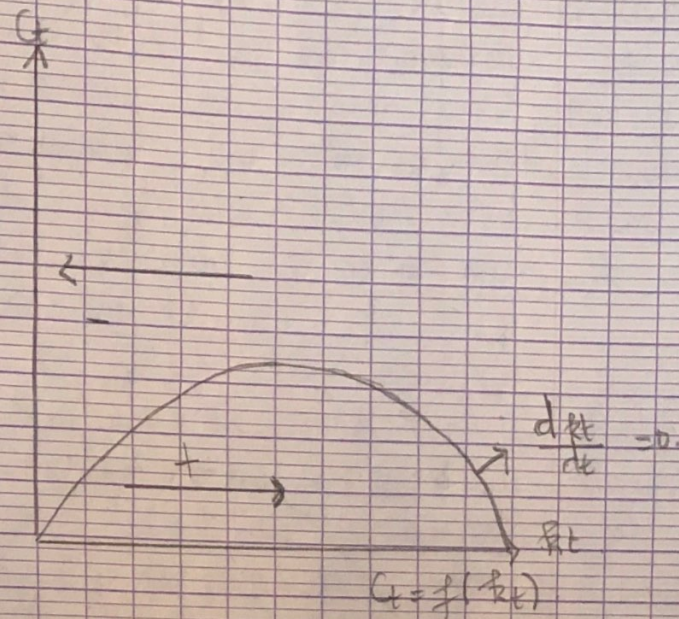
$$\frac{dk_t}{dt} = 0 \Leftrightarrow f(k_t) = c_t + \delta k_t$$

$$\Leftrightarrow c_t = f(k_t) - \delta k_t$$

$$\text{INADA (1964)} \quad f(0) = 0; \quad f'(0) = \infty; \quad f''_k < 0$$

$$f''_k < 0$$

Pour trouver
le signe pr
ment sur
la dynamique
me.

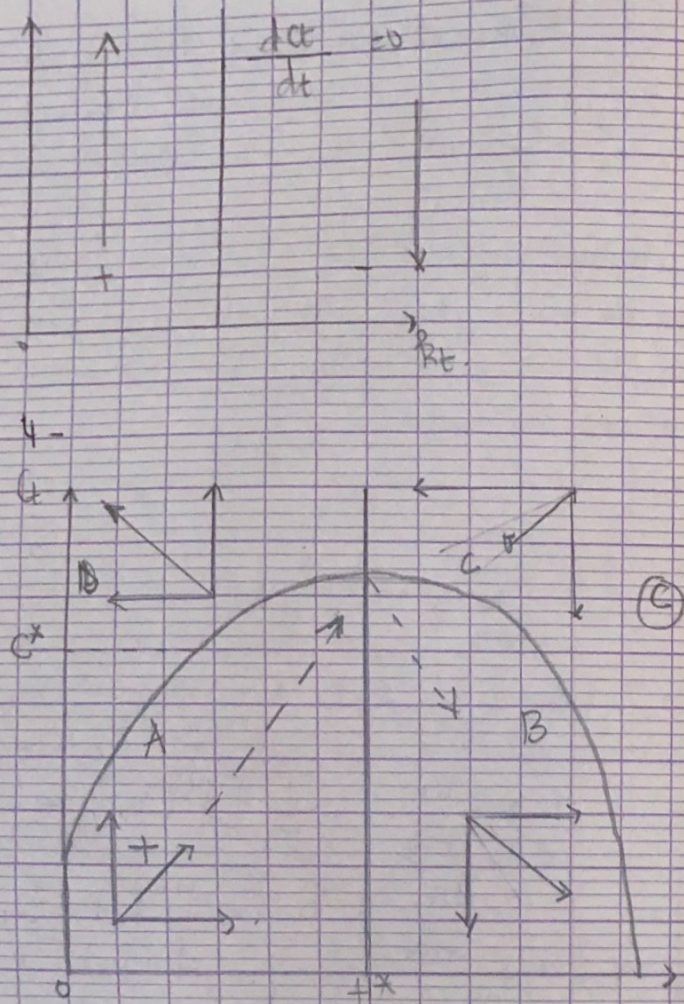


$$* \frac{dc}{C dt} = \frac{1}{\theta} [f'(k_t) - (\delta + e)]$$

$$\frac{dc}{C dt} = 0 \Leftrightarrow f'(k_t) - (\delta + e) = 0$$

$$f'(k_t) = \delta + e$$

Si la productivité du capital est constante alors k_t est constante



La zone a si une economie se trouve dans la zone a, le stock de capital est inferieur au

stock optimal K^* , la productivite marginal est trop eleve (condition d'INAM). La consommation est aussi inferieur au niveau C^* . Par consequent, pour lancer cette economie les autorites doivent en meme temps financer l'investissement et la consommation.

* Dans la zone b, le stock de capital est superieur au stock optimal et la consommation est inferieur au niveau optimal. La productivite marginale du capital est faible. Pour lancer cette economie, les autorites doivent financer la consommation et reduire l'investissement.

* Dans la zone c, le capital et la consommation sont trop eleve le pays connait certainement les

tensions inflationniste qui entame
sa compétitivité. Le pays a inté-
ret à réduire la C et I

* la zone d, le stock de ca-
pital est trop faible et la con-
sommation trop élevée. L'économie
a intérêt à investir d'avanta-
ge la productivité marginale du
capital étant trop élevée et à
réduire la consommation.

Mardi, 08 Octobre 2024

Chapitre 02 : LES MODELES DE BASE DE LA CROISSANCE ENDOGENE.

Introduction

L'un des atouts majeurs du mo-
dèle de Solow, est qu'il confirme
des caractéristiques fondamentales de
la croissance (l'effet stylisé de
l'emploi la croissance). En fait la croissance
facteur de présente les caractéristiques suivantes
production → le capital par tête ne cesse
incompréhensible de s'élever dans presque toutes les
en l'économie. En d'autres termes, le
me capital croît plus vite que le
l'emploi travail. D'où le chômage
reste de → le revenu par tête augmente
travail qui dans toutes les économies, ce qui
l'on occupe ne veut pas dire autant dire que
lorsqu'on vend
le travail

le bien être qui
→ le coefficient du capital K évolue de manière stable.

Malgré ces qualités, la théorie de la croissance classique présente plusieurs limites à savoir :

→ le taux d'épargne (%) n'a aucune influence sur la croissance.

→ l'hypothèse de la convergence postulée par Solow n'est pas toujours observée. À ce

À ces limites s'ajoute l'explication du résidu de Solow (partie de la croissance qui n'est expliquée par K ni par L ou productivité globale des facteurs).

Le modèle de croissance neoclassique n'apporte aucune explication sur le résidu de Solow.

low. Et pourtant DENISON (1961) évalue parfois ce résidu à 30 voire 40% de la croissance.

La croissance endogène vient combler à vide et elle identifie plusieurs sources de la croissance qui expliquent le résidu de Solow. Les principaux modèles s'appuient sur le concept d'externalité (conséquence positive ou négative des actions des agents économiques sur le bien-être des autres, sans que ces conséquences ne soient pris en compte par les mécanismes marchands).

Les modèles de croissance endogènes intègrent aussi la notion de rendement croissant.

I - LE MODÈLE DE AK DE REBELO (1991)

09/10-2024

(on essaye de déterminer le rôle de la PmF.)

On suppose qu'on est dans une économie sans progrès technique et sans taux de croissance. K est l'unique facteur de production. La productivité du capital est égal à α . la fonction de production se présente ainsi $y = \alpha K$ d'où le modèle αK . le capital se déprécie au taux δ . la croissance est équilibrée c.a.d que $\frac{dy_t}{dt} = \frac{dk_t}{dt}$.

L'équation d'accumulation du capital est donnée par relation suivante $dk_t = \Delta y_t - \delta K_t$. Quand on divise par K_t on obtient :

$$\frac{dk_t}{K_t} = \frac{\Delta y_t}{K_t} - \delta \quad \text{pour obtenir } \alpha$$

$\frac{dk_t}{K_t} = \alpha - \delta$ qui est le 1^{er} modèle de croissance endogène.

Contrairement au modèle de

Solow, le taux d'épargne s influence la croissance économique et le taux d'épargne est déterminé par les pô publiques.

Deux (2) implications fondamentales dans notre analyse :

- si $s > \frac{\delta}{\alpha}$ la croissance est positive et α auto-entretenu alors qu'il y a pas de progrès technique et croissance démographique comme dans le modèle néo-classique

- l'économie peut augmenter son taux de croissance en augmentant s .

II - CROISSANCE ET EXTERNALITE

1- le modèle de BARRO (1990) : les infrastructures publiques et la croissance.

09/10/2024

Hypotheses

H1: On suppose que la fonction de production y_t comporte deux (2) inputs à savoir le Capital K_t et les dépenses publiques g_t .
 $y_t = A K_t^{1-\alpha} g_t^\alpha$

H2: le taux de croissance démographique est égal à n .
 $\frac{dL_t}{L_t dt}$ est nul (b)

H3: La fonction d'utilité est donnée par la relation:
 $U(K_t) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$
 L'agent économique représentatif cherche à maximiser cette fonction d'utilité.

H4: L'équation d'accumulation du Capital est donnée par la relation suivante $\frac{dK_t}{dt} = (1-t) s y_t =$

$$(1-t) [y_t - c_t]$$

H5: $g_t = t y_t$
 Les dépenses publiques sont financées par les impôts. Nous cherchons le taux d'impôt qui égalise l'effet positif des infrastructures sur la productivité des p'ses à l'effet négatif des impôts sur la productivité $t = \alpha$

Pour trouver t , on peut passer par deux méthodes:

→ Croissance du Capital

$$\frac{dK_t}{dt} = (1-t) s y_t$$

$$\frac{dK_t}{K_t dt} = (1-t) s \left(\frac{y_t}{K_t} \right)$$

$$y_t = A K_t^{1-\alpha} t^\alpha y_t^\alpha$$

$$y_t^{1-\alpha} = A K_t^{1-\alpha} t^\alpha$$

$$\left(\frac{y_t}{K_t} \right)^{1-\alpha} = A t^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{dk_t}{k_t dt} = 1$$

$$\left(\frac{y_t}{k_t} \right)^{1-\alpha} = A t^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{y_t}{k_t} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{dk_t}{k_t dt} = (1-t) \Rightarrow A^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[(1-t) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]$$

$$\left(\frac{dk_t}{k_t dt} \right)_t = \Rightarrow A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-t) \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{t} \right]$$

$$\left(\frac{dk_t}{k_t dt} \right)_t = \Rightarrow A^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[1 + (1-t) \frac{\alpha}{1-\alpha} \right]$$

$$\text{si } \left(\frac{dk_t}{k_t dt} \right) \Rightarrow 0 \Leftrightarrow -\overset{A}{(1-\alpha)}t + \overset{B}{(1-t)\alpha} = 0$$

Effet négatif des impôts sur la productivité $A = B$ si $t = \alpha$

Effet positif des infrastructures sur la productivité.

Méthode 2 : la fonction de consommation.

Il s'agit de $\max U(c_t)$.

$$\text{s.t. : } \frac{dk_t}{dt} = (1-t)(y_t - c_t)$$

soit le hamiltonien sous-jacent à ce programme

$$H = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda_t [(1-t)(y_t - c_t)]$$

C.P.D.

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow e^{-\rho t} c^{-\theta} - \lambda_t (1-t) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = -\frac{d\lambda_t}{dt} \Leftrightarrow \lambda_t (1-t) \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = -\frac{d\lambda_t}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \frac{dk_t}{dt} = (1-t)(y_t - c_t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} k_t = 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} - \lambda t (1-t) = 0 \quad (1)$$

$$\lambda t (1-t) \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = - \frac{d\lambda t}{dt} \quad (2)$$

$$\textcircled{1} C_t e^{-\lambda t} = \lambda t (1-t)$$

$$\Rightarrow -\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda (1-t) \text{ for } (1-t)$$

$$\Rightarrow -\lambda \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda t}{dt} e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda t}{dt}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda t}{dt} e^{-\lambda t} = -(1-t) \frac{\partial y_t}{\partial k_t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda t}{dt} e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda t}{dt}$$

$$\Rightarrow -\lambda \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda t}{dt} e^{-\lambda t} = -(1-t) \frac{\partial y_t}{\partial k_t}$$

$$\frac{d\lambda t}{\lambda dt} = \frac{1}{\lambda} \left[(1-t) \frac{\partial y_t}{\partial k_t} - e \right]$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left[(1-t) y_{k_t} - p \right]$$

$$y_t = A k_t^{1-\alpha} g_t^\alpha$$

$$y_t = A k_t^{1-\alpha} g_t^\alpha$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial k_t} = (1-\alpha) A k_t^{-\alpha} g_t^\alpha = (1-\alpha) \frac{y_t}{k_t}$$

$$y_t = A k_t^{1-\alpha} g_t^\alpha$$

$$\Rightarrow y_t = A k_t^{1-\alpha} \frac{1}{t} g_t^\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_t}{k_t} \right) = A t^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{y_t}{k_t} = A \frac{1}{1-\alpha} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial k_t} = (1-\alpha) A \frac{1}{1-\alpha} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{d\lambda t}{\lambda dt} = \frac{1}{\lambda} \left[(1-t) (1-\alpha) A \frac{1}{1-\alpha} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - p \right]$$

$$= \frac{1}{\lambda} (1-t) (1-\alpha) A \frac{1}{1-\alpha} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{p}{\lambda}$$

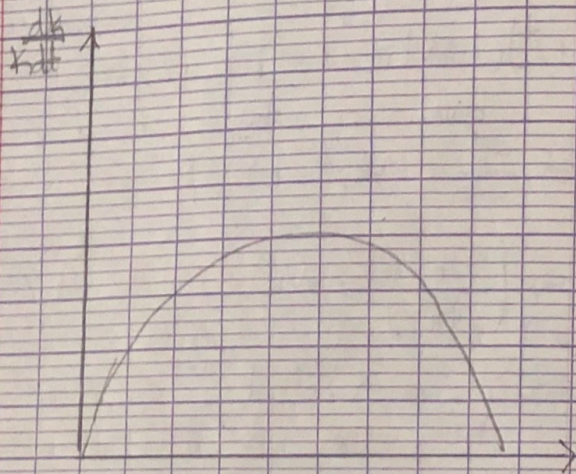
$$\frac{d\lambda t}{\lambda dt} = \frac{1}{\lambda} (1-\alpha) A \frac{1}{1-\alpha} \left[-t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-t) \frac{\alpha}{(1-\alpha)} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} \right]$$

$$= \frac{1}{\lambda} (1-\alpha) A \frac{1}{1-\alpha} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} \left[-1 + (1-t) \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \right]$$

$$\left(\frac{d\lambda t}{\lambda dt} \right) = 0 \Rightarrow \frac{-(1-\alpha)}{\lambda} + \frac{(1-t)}{B} \alpha = 0$$

$t=x$ la crois-
sance est optimale

$$\text{si } t=x \Rightarrow A=B.$$



15-10-2022

2 - le modèle de ROMER 1986

Les externalités engendrées dans la théorie de la croissance endogène sont multiples. Dans le 1^{er} modèle de ROMER (1986), ces externalités font référence aux interactions que existent entre les ES à travers leurs dépenses en capital physique. Il y a une

faune est seule à accumuler le capital physique, la productivité de ce capital va diminuer avec l'augmentation du capital.

En revanche, si un grand nombre d'ES font en même temps l'acquisition des biens d'équipement, le rendement individuel de ce capital sera globalement croissant en raison des différentes interactions qui existent entre les ES.

ROMER fait une distinction entre le capital privé détenu entre les ES et le capital social détenu par l'économie.

Parallèlement il distingue la productivité marginale privée du capital de la productivité marginale sociale du capital.

les hypothèses du modèle.

H_1 : On suppose qu'il existe N îles indépendantes

H_2 : chaque île tient un capital identique noté k . Le capital total ou global de l'économie est $K = Nk$. N est aussi appelé la taille de l'économie. La fonction de production est donnée par la relation :

a : élasticité du capital
 $f(k, K) = k^a K^u$, a = élasticité de la production par rapport au capital individuel. u = externalité ou encore l'élasticité de la production par rapport au capital total de l'économie ($a + u > 0$)
 $a + u = 1$. A cause de u les rendements croissent.

Exercice

En considérant les hypothèses ci-dessus, démontrer que la productivité marginale du capital est

supérieure à la productivité du capital.

2- En considérant un agent représentatif qui cherche à maximiser sa fonction d'utilité suivante
$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} dt$$

$$\text{sic } dk_t = f(k_t) - c_t - s k_t$$

calculer le taux de croissance de la consommation, déduire le diagramme d'Eufase

3- Démontrer que si le nombre de l'île varie et si le capital et la production croissent au même taux, le taux de croissance de cette économie est déterminé par le taux de croissance du nombre d'île.

4- Au regard des résultats ci-dessus, quelle est la 1^{ère} implication du modèle de ROMER de (1986)

Solution

1. Démontrons que $Pm_{social} > Pm_{privée}$.

On sait que $f(K_t, K_t) = K_t^a K_t^u$

$$* Pm_{privée} = \frac{2f(K_t, K_t)}{2K_t} = a K_t^{a-1} K_t^u$$

$$Pm_{privée} = a K_t^{a-1} N^u K_t^u$$

$$Pm_{privée} = \underline{a K_t^{a+u-1} N^u}$$

$$* Pm_{social} = \frac{2f(K_t, K_t)}{2K_t}$$

$$\begin{aligned} \text{On sait que } f(K_t, K_t) &= K_t^a K_t^u \\ &= K_t^a K_t^u N^u \\ &= K_t^{a+u} N^u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pm_{social} &= (a+u) K_t^{a+u-1} N^u \\ &= \underbrace{a K_t^{a+u-1} N^u}_{Pm_{privée}} + \underbrace{u K_t^{a+u-1} N^u}_{\text{gain de productivité du } K} \end{aligned}$$

$$2 - U(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$$

$$\text{stc } \frac{dK_t}{dt} = f(K_t, K_t) - C - \delta K_t$$

D'après le hamiltonien

$$H = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt + \lambda_t [f(K_t, K_t) - C - \delta K_t]$$

C.P.D

$$\frac{\partial H}{\partial C} = 0 \Rightarrow e^{-\lambda t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial K_t} = \frac{dK_t}{dt} \Rightarrow f(K_t, K_t) - C - \delta K_t = \frac{dK_t}{dt}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \frac{d\lambda_t}{dt} \Rightarrow \lambda_t [f(K_t, K_t) - \delta K_t] = \frac{d\lambda_t}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \frac{dK_t}{dt} \Rightarrow f(K_t, K_t) - C - \delta K_t = \frac{dK_t}{dt} \quad (3)$$

$$\text{Ma } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t = 0$$

Manipulons l'équation (1)

$$\lambda e^{-\lambda t} + \lambda_n C_t = \lambda_n \lambda_t$$

$$G_t = \theta \ln G_t = \ln dt.$$

$$P_t = \theta \frac{1}{G_t} \times \frac{dG_t}{dt}$$

$$= \theta \frac{dG_t}{G_t} = \frac{dG_t}{dt}$$

$$\theta \frac{dG_t}{G_t} = \frac{dG_t}{dt} + e$$

$$\frac{dG_t}{G_t} = \frac{1}{\theta} \left[\frac{dG_t}{dt} + e \right]$$

Remplaçons $\frac{dG_t}{dt}$ par son expression

$$\frac{dG_t}{G_t} = \frac{1}{\theta} [f'(K_t) K_t - \delta - e]$$

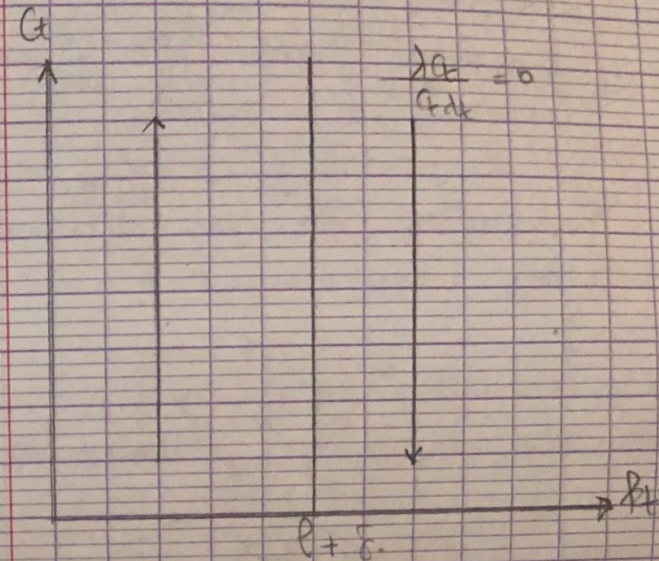
On sait que $f'(K_t) = K_t^{a+u-1} N^u$
 $f'(K_t) = (a+u) K_t^{a+u-1} N^u$

$$\text{d'où } \frac{dG_t}{G_t} = \frac{1}{\theta} [(a+u) K_t^{a+u-1} N^u - \delta - e]$$

$$\frac{dG_t}{G_t} = \frac{1}{\theta} [f'(K_t) K_t - \delta - e]$$

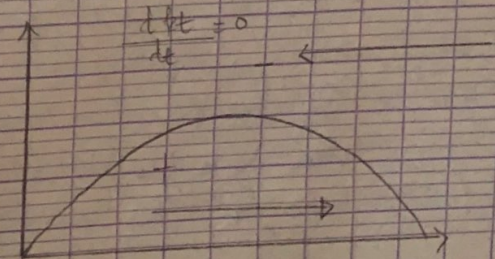
Posons $\frac{dG_t}{G_t} = 0 \Rightarrow f(K_t) = \delta + e$

La productivité marginal du Capital est constante donc K est constant.



$$\frac{dK_t}{dt} = f(K_t) - G_t - \delta K_t$$

$$\text{Si } \frac{dK_t}{dt} = 0 \Rightarrow G_t = f(K_t) - \delta K_t$$



Enseignement 3 - Le Modèle de Lucas (1988):

Transmission le capital humain et la croissance.

les théorèmes de l'enseignant vers l'apprenant.

Dans son article publié en 1988 intitulé "les mécanismes de l'économie du développement" LUCAS définit le capital humain comme l'ensemble des capacités physiques, intellectuelles et techniques qui contribuent à la croissance économique. Ces capacités intègrent l'éducation, la santé et la qualité de l'environnement.

Comme le capital physique, le capital humain peut s'accumuler. Mais si le capital physique s'accumule suivant le processus de rendement constant ou voir de croissant, le capital humain s'accumule suivant le processus du

rendement croissant. Parce que le K humain est en même temps l'out-put et l'input.

les enseignants forment les étudiants utilisent les connaissances acquises pour générer d'autres connaissances.

1 - les hypothèses du modèle

On suppose que chaque employé utilise une partie de son temps pour accumuler des connaissances, améliorer son état de santé et la qualité de son environnement. La fonction d'accumulation se présente ainsi

$$\frac{dH_t}{dt} = \alpha(1-\mu)H_t \text{ en d'autre terme le taux } = \frac{dH_t}{H_t dt} = \alpha(1-\mu)$$

l'accumulation du capital humain a des effets individuels et collectifs.

sur le plan individuel, on distingue l'effet allocatif en d'autres

terme, un individu inclut fait
une meilleur répartition de son
temps entre le travail, le loisir
et le repos.

Selon MINER (1974) l'édu-
cation emploi la productivité
pour qu'on établit une
relation entre le niveau d'in-
struction et les salaires. En res-
sant les efforts perdus compen-
sations compensatoires.

L'éducation permet une bonne

13-M-004 - L'éducation inclut la crime-
nalité.

Selon BECKER l'éducation a
deux effets opposés sur le
comportement du potentiel criminel

Dans un premier temps, elle permet
à l'individu de mieux préparer
le crime, dans ce cas l'éducation
accroît le taux de criminalité.

Dans un deuxième temps, l'édu-
cation permet à l'individu de
connaître les sanctions auxquelles
il est opposé lorsqu'il accepte de
commettre le crime. Plus les sanctions
potentielles sont lourdes, moins il
est disposé à commettre le crime.
Dans ce cas, l'éducation réduit
la criminalité.

Becker démontre que pour tout
agent rationnel le second effet sur-
passe sur le premier.

- L'éducation permet de réduire
la fécondité. En d'autres termes
l'enfant est un bien qui procure

une certaine satisfaction aux parents nous en même temps, l'enfant a un prix.

À partir de ces deux hypothèses, on peut appliquer un calcul micro-économique à la demande des enfants, en considérant deux prix : le 1^{er} indirect ou le coût indirect C-a-d toute les dépenses que les parents effectuent pour élever un enfant.

le 2^{ème} coût est Indirect ou Coût d'opportunité C-a-d c'est la perte de ressource subit par un ménage parce que le dernier a décidé de consacrer une partie de son temps de travail pour élever un enfant.

(P.N. le prix du bien contenant le coût direct et Indirect) P_{XX} est le prix d'un enfant)

On peut donc avoir $U(X, N)$ où

X représente le bien et N le nombre d'enfant.

$N = \frac{Y}{P_N}$ le prix d'enfant augmentant en fonction de Y .
En réalité, le second effet (le prix de l'enfant augmente avec le niveau d'instruction) emporte sur le premier (le niveau d'instruction augmente le revenu)

- L'éducation améliore la santé des membres d'une famille. En d'autre terme, une mère instruite prend des dispositions pour préserver la santé de l'enfant.

- L'éducation augmente la productivité moyenne de la société. En d'autre terme la rencontre entre un individu qualifié donne naissance à une compétence collective non intégrée aux deux individus avant la rencontre. Retrologiquement, la rencontre entre deux individus non

qualifiée donne naissance à une compétence **contre productive**, dangereuse pour la société.

- l'éducation permet de sanctionner les mauvais dirigeants politiques

- l'éducation réduit les **inégalités du genre**. En d'autres termes l'éducation permet en cause la ~~partie~~ ~~origine~~ ~~du~~ ~~travail~~ ~~division~~ traditionnelle du travail qui voulait que la femme soit représentée dans les travaux ménagers.

Grâce à l'éducation, la femme est représentée dans le marché du travail et occupe les postes politiques.

L'éducation réduit l'inégalité du genre dans le travail non rémunéré.

si la ~~lettre~~ nature démontre en fait que l'homme instruit travaille plus dans son ménage par rapport à l'homme qui n'est pas instruit.

la fonction de production se présente ainsi:

$$Y = AK_H^{\alpha} (H N H_a)^{1-\beta} H_a^{\psi}$$

Y = la production. K = le capital physique, H est le capital humain individuel, N est le nombre d'employés, H_a le capital moyen humain de la société.

ψ est l'élasticité de la production par rapport au capital moyen, β est le temps consacré à l'accumulation du capital humain.

le taux de croissance de l'accumulation du capital humain est donné

par $\frac{dH_t}{H_t} = \lambda(1-\mu)$

l'équation de l'accumulation du capital humain physique est donnée par λ

la fonction d'utilité est donnée par $U(H_t) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{N_t C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$

1- Démontrez que la productivité sociale du capital humain $<$ la productivité privée du capital humain.

SN

2- Calculer le taux de croissance économique en supposant que le capital et la production croissent à un même taux en considérant la fonction sociale.

3- Reprenez la question 2 ci-

dessus en considérant la fonction privée. Comparez les deux taux de croissance obtenus.

4- Calculer le taux de croissance de la consommation.

Solution.

1- Démontrez que $P_{ms} < P_{mtH}$.

Pms Nos on suppose que $\lambda a = \lambda$.

$$Y_t = A K_t^\alpha (U_t N_t H_t)^{1-\beta} H_t^\psi$$

$$= A K_t^\alpha U_t^{1-\beta} N_t^{1-\beta} H_t^{1-\beta+\psi}$$

$$\frac{\partial P_{ms}}{\partial H_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = (1 +$$

$$Y_t = A K_t^\alpha (U_t N_t H_t)^{1-\beta} H_t^\psi$$

$$= A K_t^\alpha U_t^{1-\beta} N_t^{1-\beta} H_t^{1-\beta+\psi}$$

$$P_{ms} = \frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = (\gamma + 1 - \beta) A K_t^\alpha + U^{\frac{1-\beta}{\beta}} N_t^{1-\beta} H_t^{\gamma-\beta}$$

$$P_{m \text{ privée}} = \frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = (1-\beta) A K_t^\alpha + U^{\frac{1-\beta}{\beta}} N_t^{1-\beta} H_t^{\gamma-\beta}$$

$$= (1-\beta) A K_t^\alpha U^{\frac{1-\beta}{\beta}} N_t^{1-\beta} H_t^{\gamma-\beta}$$

En développant, on obtient :

$$= \underbrace{\gamma A K_t^\alpha U^{\frac{1-\beta}{\beta}} N_t^{1-\beta} H_t^{\gamma-\beta}}_{\text{gain de productivité}} + \underbrace{(1-\beta) A K_t^\alpha U^{\frac{1-\beta}{\beta}} N_t^{1-\beta} H_t^{\gamma-\beta}}_{P_{m \text{ privée}} \text{ de } H_t}$$

2. Calculons le taux de croissance.

En linéarisant on a :

$$Y_t = A K_t^\alpha (U N_t)^{1-\beta} H_t^\gamma$$

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + (1-\beta) \ln U + \gamma \ln H_t$$

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + (1-\beta) \ln U + \gamma \ln H_t$$

$$Y_t = A K_t^\alpha (U N_t)^{1-\beta} H_t^{\gamma-\beta+1}$$

linéarisons

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + (1-\beta) \ln U + (\gamma - \beta + 1) \ln H_t$$

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + (1-\beta) \ln U + (\gamma - \beta + 1) \ln H_t$$

Dérivons $\ln Y_t$.

$$\frac{1}{Y_t} \frac{dY_t}{dt} = \alpha \cdot \frac{1}{K_t} \frac{dK_t}{dt} + (1-\beta) \cdot \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} + (\gamma - \beta + 1) \frac{1}{H_t} \frac{dH_t}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dY_t}{Y_t dt} (1-\alpha) = (\gamma - \beta + 1) \frac{dH_t}{H_t dt} = \alpha (\gamma - \beta + 1) (1-\alpha)$$

$$\frac{dY_t}{Y_t dt} = \frac{\alpha}{1-\alpha} (1-\alpha) (\gamma - \beta + 1)$$

B-

α est paramètre d'efficience qui représente le niveau de productivité dans la fonction du capital humain. En d'autre terme une économie aura un taux de croissance élevé si elle dispose des universités et des hôpitaux meilleur.

ψ est externalité générée par le capital humain moyen.

$1-\mu$ est le temps consacré à l'accumulation des connaissances.

$$3- Y_t = A k_t^\alpha (U N_t H_t)^{1-\beta} H_t^\psi$$

En linéarisant :

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln k_t + (1-\beta) \ln U + (1-\beta) \ln N_t + (1-\beta) \ln H_t + \psi \ln H_t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y_t} \frac{dY_t}{dt} = \alpha \frac{1}{k_t} \frac{dk_t}{dt} + (1-\beta) \frac{1}{N_t} \frac{dN_t}{dt} + (1-\beta) \frac{1}{H_t} \frac{dH_t}{dt} + \psi \frac{1}{H_t} \frac{dH_t}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dY_t}{Y_t dt} (1-x) = x (1-\beta) (1-u) + \psi x (1-u)$$

$$\frac{dY_t}{Y_t dt} = \frac{x (1-u) (1-\beta + \psi)}{1-x}$$

Interprétation

On retrouve le même taux de croissance par ce qu'on suppose que le Capital humain moyen croît au même taux que le capital humain individuel.
On

4- Calculons le taux de croissance.

$$U(C_t) \int_0^\infty e^{-\rho t} N_t C_t^{1-\epsilon} dt$$

$$\text{sc } \frac{dk_t}{dt} = Y_t - N_t + C_t \quad ; \quad \frac{dH_t}{dt} = (1-u) H_t x$$

soit le hamiltonien.

$$H = \int_0^{\infty} e^{-\theta} \frac{N_t C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda_{1t} (Y_t - N_t C_t) + \lambda_{2t} (H_t \times (1-u))$$

C.P.O

$$\frac{\partial H}{\partial C_t} = 0 \Rightarrow e^{-\theta} N_t C_t^{-\sigma} - \lambda_{1t} N_t = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial N_t} = -\frac{d\lambda_{1t}}{dt} \Rightarrow \lambda_{1t} \frac{\partial Y_t}{\partial N_t} = -\frac{d\lambda_{1t}}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial H_t} = -\frac{d\lambda_{2t}}{dt} \Rightarrow \lambda_{2t} (1-u) = -\frac{d\lambda_{2t}}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{1t}} = Y_t - N_t C_t = 0 \quad (4)$$

$$= \frac{dN_t}{dt} = Y_t - N_t C_t \quad (4')$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{2t}} = H_t \times (1-u) = 0 \quad (5)$$

$$= \frac{dH_t}{dt} = H_t \times (1-u) \quad (5')$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\theta} N_t C_t^{1-\sigma} dt = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\theta} H_t dt = 0$$

$$e^{-\theta} N_t C_t^{-\sigma} = \lambda_{1t} N_t \quad (1')$$

$$\left\{ \frac{\partial H}{\partial N_t} = -\frac{d\lambda_{1t}}{dt} \right. \quad (2)$$

$$e^{-\theta} N_t C_t^{-\sigma} = \lambda_{1t} N_t$$

En prenant le log :

$$-\theta + \ln N_t - \sigma \ln C_t = \ln \lambda_{1t} + \ln N_t$$

En derivant par rapport à t

$$-e^{-\theta} \frac{\sigma}{C_t} = \frac{1}{\lambda_{1t}} \frac{d\lambda_{1t}}{dt}$$

$$= -e^{-\theta} \frac{\sigma}{C_t} = \frac{\partial H}{\partial N_t}$$

$$\frac{d\lambda_{1t}}{dt} = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial H}{\partial N_t} - e^{-\theta} \right]$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{\beta} \left[\alpha A H_t^{\alpha-1} (UN_t)^{1-\alpha} H_t^{1+\alpha-\beta} - \delta K \right]$$

19-M-2024

PARADOXE DE LUCAS

L'implicite du modèle de Solow est que les États doivent former le capital humain pour que les rendements soient constants et la croissance auto-entretenu. L'État doit donc intervenir pour former le capital humain à travers la création des bonnes universités et des bons hôpitaux.

La deuxième contribution de Lucas concerne la remise en cause de la convergence postulée par Solow et encore appelée paradoxe de Lucas.

Pour démontrer ce paradoxe, considérons un pays intégrale doté en capital physique et

en capital humain. Confronter tableau ci-dessus:

Pays 1	Pays 2
$\frac{K_t}{H_t} = \frac{16}{8}$	$\frac{K_t}{H_t} = \frac{4}{2}$

Le pays 1 est développé par rapport au pays 2. Mais selon Solow les pays partent dans les 1 pays 2 en raison de la déficience des facteurs de production. Selon Lucas les pays 1 partent vers les pays 2. D'où la remise en cause de l'hypothèse de convergence postulée par Solow.

Les salaires étant élevés dans le pays 1 les meilleurs capitaux du pays 2 quittent le pays à la recherche d'une forte rémunération pour aller s'installer dans le pays 1. D'où un accroissement des inégalités entre les 2 pays. Le pays

A va davantage se développer alors que le pays ² va connaître un grand retard de développement.

En réalité, les pays pauvres rattrapent les pays développés si deux (ou) conditions sont réunies:

- la technologie est un bien public c-à-d accessible à tous ce qui est impossible. Car la technologie est protégée par les brevets.

- la libre circulation des personnes est assurée ce qui est aussi impossible car elle est restreinte entre les États.

4- Le Deuxième Modèle de ROSTER
La recherche et le développement

Dans ce modèle de ROSTER (1991), le rôle de la recherche et développement. À l'origine, ce modèle supposait que l'unique facteur de recherche des de produits dans le secteur de la recherche est le travail. Pourtant, le travail peut être utilisé dans le secteur de la production des biens et services (L_1) et dans le secteur de la recherche (L_2). On aura donc $L = L_1 + L_2$, avec L , l'offre totale du travail. On suppose que L_1 et L_2 sont constantes.

H1: la fonction de production dans le secteur de bien et service est donnée par la relation $Y = L_1^{1-\alpha} \int_0^M x_i^\alpha di$

On a M secteurs dans cette économie x_i est l'input du secteur i .

Noter : le prix de chaque bien intermédiaire est égal à sa P_{mi} du bien X .

Exercice.

1. En supposant que chaque bien intermédiaire est produit par le bien final à l'aide d'une technologie 1 pour 1. Calculer le profit, le prix et la quantité produite u .

On suppose que le prix de l'input $u = 1$.

* Calcul de P_u

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \alpha L_1^{1-\alpha} u_i^{\alpha-1}$$

$$P_u = \alpha L_1^{1-\alpha} u_i^{\alpha-1}$$

* Calcul du Π $\Pi = P_u \cdot u$

$$\Pi = [\alpha L_1^{1-\alpha} u_i^{\alpha-1}] u = u$$

$$= \alpha L_1^{1-\alpha} u_i^{\alpha-1} u = u$$

$$= \alpha L_1^{1-\alpha} u_i^{\alpha-1+1} = u$$

$$\Pi = \alpha L_1^{1-\alpha} u^\alpha = u$$

* Calcul de u .

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = 0 \Rightarrow \alpha L_1^{1-\alpha} u^{\alpha-1} = 0$$

$$\alpha L_1^{1-\alpha} u^{\alpha-1} = 1$$

$$u^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha L_1^{1-\alpha}}$$

$$u^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha L_1^{1-\alpha}}$$

$$u = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} L_1^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \alpha L_1^{1-\alpha} \left(\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L_1 \right)^{\alpha-1} \\
 &= \alpha L_1^{1-\alpha} \alpha^{\frac{2(\alpha-1)}{1-\alpha}} L_1^{\alpha-1} \\
 &= \alpha L_1^{1-\alpha+\alpha-1} \alpha^{-2} \\
 &= \alpha L_1^{-1} \alpha^{-2}
 \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{\alpha}$$

$$\pi = Pn - n$$

$$\pi = n(P - 1)$$

$$= n \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)$$

$$= n \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\pi = \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L_1 \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)$$

* Calcul de la productivité (y).

$$\begin{aligned}
 Y &= L_1^{1-\alpha} \int_0^M u_i^\alpha di \\
 Y &= L_1^{1-\alpha} \int_0^M \left(\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L_1 \right)^\alpha \\
 &= L_1^{1-\alpha} M \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} L_1^\alpha \\
 Y &= L_1 M \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}
 \end{aligned}$$

la mesure de la variété des biens M est à la fois qui dépend de la quantité L_2 de travail allouée dans le secteur de la recherche.

Dans le secteur de la recherche, cette variété de bien est donné par la relation $\frac{dM}{dt} = \lambda M \frac{L_2}{L_1}$

> productivité dans le secteur de la recherche.
Ici, tous les chercheurs ont

la possibilité d'utiliser la connaissance accumulée M_t incorporée dans les plans de production. Les rendements sont croissants pour les raisons.

- la spécialisation ou la différenciation

- l'externalité c-à-d tout les chercheurs peuvent utiliser les connaissances incorporées dans M_t

Dans le secteur de la recherche, le flux de π est donné par la relation suivante.

$$\frac{\pi}{r} \Delta M_t L_2 - w_t L_2 = 0$$

Par définition $r = \frac{\pi \Delta M_t}{w_t}$ r est

le taux d'intérêt réel. Il doit être au flux de π lorsqu'elle investit dans le secteur de la recherche.

On suppose que tout les produits se produisent un bien intermédiaire, la fonction de production devient :

$$Y = L^{1-\alpha} \sum_0^{M_t} k_t^\alpha$$

$$= L^{1-\alpha} \sum_0^{M_t} k^\alpha$$

$$Y = L^{1-\alpha} M_t^\alpha k^\alpha$$

Le salaire est q dans le secteur de la recherche et dans le secteur des biens et services. En d'autres termes

* Trouvons le salaire.

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = 0 \Rightarrow (1-\alpha) L^{-\alpha} M_t^\alpha k^\alpha = 0$$

$$= (1-\alpha) L^{-\alpha} M_t^\alpha k^\alpha =$$

$$w_t = (1-\alpha) L^{-\alpha} M_t^\alpha \left(\alpha \frac{2}{1+\alpha} L_1 \right)^\alpha$$

$$= (1-\alpha) L^{-\alpha} M_t^\alpha \propto \frac{2\alpha}{1-\alpha} L_1^\alpha$$

$$= (1-\alpha) L_1^{-\alpha} M_t^\alpha \propto \frac{2\alpha}{1-\alpha} L_1^\alpha$$

$$W_t = (1-\alpha) M_t^\alpha \propto \frac{2\alpha}{1-\alpha}$$

$$g = \frac{dM_t}{dt} = \lambda M_t L_2$$

$$g = \frac{dM_t}{M_t dt} = \lambda L_2 \quad \text{or} \quad L_2 = L_1 - L_1$$

$$g = \frac{dM_t}{M_t dt} = \lambda (L - L_1) \quad (1)$$

$$g = \frac{S'(K) - P}{\delta} = \frac{r - P}{\delta} \quad (2)$$

$$r = \frac{\pi \lambda M_t}{W_t}$$

$$W_t = (1-\alpha) M_t^\alpha \propto \frac{2\alpha}{1-\alpha}$$

$$\pi = \frac{1-\alpha}{\alpha} L_1^\alpha \propto \frac{2\alpha}{1-\alpha}$$

$$r = \frac{\pi \lambda M_t}{W_t}$$

$$r = \frac{\frac{(1-\alpha)}{\alpha} L_1^\alpha \propto \frac{2\alpha}{1-\alpha} \cdot \lambda \cdot M_t}{(1-\alpha) M_t^\alpha \propto \frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha(1-\alpha)} L_1^\alpha \propto \frac{2\alpha}{1-\alpha} \lambda$$

$$r = \frac{1}{\alpha} L_1^\alpha \propto \frac{2\alpha}{1-\alpha} \lambda$$

$$= \frac{1}{\alpha} L_1^\alpha \propto \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha} \right) \lambda$$

$$= \frac{L_1}{\alpha} \propto \lambda$$

$$r = \lambda \alpha L_1 \quad (3)$$

$$L = L_1 + L_2 \quad (4)$$

$$\begin{cases} g = \lambda(L - L_1) & (1) \\ g = \frac{r - p}{\sigma} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \alpha \lambda L_1 & (3) \\ L = L_1 + L_2 & (4) \end{cases}$$

③ dans 1. $g = \frac{\alpha \lambda L - p}{\sigma}$ ③

$$\begin{cases} g = \lambda(L - L_1) & (1) \\ L = L_1 + L_2 & (2) \end{cases}$$

(4) $L_1 = L - L_2$

④ dans ③ $g = \frac{\alpha \lambda (L - L_2) - p}{\sigma}$

$$g = \lambda(L - L_1)$$

$$= \lambda(L - L + L_2)$$

$$g = \lambda L_2$$

$$g\sigma = \alpha \lambda L - \alpha \lambda L_2 = p$$

$$\Rightarrow g\sigma = \alpha \lambda L - \alpha g - p$$

$$\Rightarrow g\sigma + \alpha g = \alpha \lambda L - p$$

$$= g(\sigma + \alpha) = \alpha \lambda L - p$$

$$g = \frac{\alpha \lambda L - p}{\sigma + \alpha}$$

Dans ce modèle la croissance augmente avec la productivité (λ) et avec la taille de l'économie (L) et diminue avec un taux de préférence pour le présent (ρ) et avec le coefficient d'aversion pour le risque (σ). Le résultat vient valider le débat initié par MALTHUS. En effet la croissance augmente avec la population comme en témoigne le « stylisé ». Tout les pays en or-

gent sont relativement peuplés
Mais en ce temps la presse
démographique sur l'environnement
lève des inquiétudes.

Mardi, 20 Novembre 2018

Chapitre 3 :

LES AUTRES MODELES DE LA CROISSANCE ENDOGENE

Introduction

Les modèles étudiés au chapitre 2
expliquent la croissance par l'in-
vestissement physique (modèle AK de Ro-
belo, modèle de BARRO avec les
infrastructures, le 1^{er} modèle de
ROMER avec la taille de l'économie
les deux autres modèles à savoir
celui de LUCAS (1988) et ROMER (1990)
mettent l'accent respectivement sur
le capital humain et la recherche
de développement) pourtant ces modè-
les n'expliquent pas toutes les
sources de la croissance endogène
en d'autre terme ces modèles
n'expliquent pas entièrement le se-

du de Solow. Il existe en effet d'autres variables qui expliquent la croissance endogène, notamment le système financier, la qualité des institutions, l'éducation et même la dotation en ressources naturelles.

D'autres auteurs ont mis l'accent sur la démocratie et la croissance, les inégalités et la croissance, la redistribution et la croissance.

Dans ce chapitre, nous allons identifier d'autres sources de la croissance endogènes.

I - INNOVATION ET CROISSANCE

1 - Hypothèses

H_1 : On suppose que les individus vivent deux (2) périodes et

travaillent dans le secteur des biens et services. Le salaire de la 1^{re} période permet de financer la recherche.

H_2 : On suppose qu'il y a n individus normalisés à 1. Chaque individu est doté d'une unité de travail dans la 1^{re} période et 0 dans la seconde. Le bien est produit dans un secteur concurrentiel.

H_3 : la fonction de production est donnée par $Y_t = L^{1-\alpha} \int_0^A A_{it} K_{it}^\alpha di$. K_{it} est l'input, A_{it} paramètre de productivité. Dans le secteur 1, l'individu a la possibilité d'innover.

la technologie initiale dans le secteur 1 et à la date t est déterminé par le paramètre de productivité A_{it} . On est en effet la moy

moyenne du niveau de productivité dans le secteur.

à la date t , $A_t = \int_0^1 A_{it-1} di$

si u est la probabilité que l'individu innove dans le secteur

à la date t , $1-u$ est la probabilité qu'il n'innove pas.

Si il innove il devient un innovateur dans le secteur. Son niveau de productivité dans le

secteur devient $A_t = \gamma A_{t-1}$ avec

$\gamma > 1$.

le niveau de productivité moyen : ~~si il n'innove pas est :~~

$$A_t = u \gamma A_{t-1} + (1-u) A_{t-1}$$

Calculer le taux de croissance de productivité dans ce cas et interpréter?

Par définition $g = \frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}}$

ou on a déjà A_t

$$A_t = u \gamma A_{t-1} + (1-u) A_{t-1}$$

$$g = \frac{u \gamma A_{t-1} + (1-u) A_{t-1} - A_{t-1}}{A_{t-1}}$$

$$= \gamma u + 1 - u - 1$$

$$g = \gamma u - u = u(\gamma - 1)$$

$$g = u(\gamma - 1)$$

Plus la probabilité u d'innover est élevée plus la croissance est élevée.

Ce modèle met l'accent sur les capacités des individus à innover.

Si nous avons plus d'entrepreneurs

capable d'innover, la croissance sera innovée élevée.

En considérant le modèle,

$$Y_t = L^{1-\alpha} \int_0^1 A_t x_t^\alpha dx$$
 et en supposant que le prix du bien x est égal à sa productivité marginale, calculer le prix du bien x , le π et déduire la croissance économique en démontrant que cette croissance est fondamentalement expliquée par l'innovation.

Pour la croissance nous devons trouver

Ver: $\frac{dY_t}{dt} = \alpha \frac{dA_t}{A_t}$

$\frac{dY_t}{dt} = \alpha \frac{dA_t}{A_t}$

On suppose que la probabilité d'innover est fonction des dépenses qu'il faut réaliser pour financer la recherche. Selon la relation suivante: $u = \lambda \left(\frac{R_t}{A_t} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ avec

$A_t = \lambda A_{t-1}$

R est les dépenses réalisées pour financer l'innovation

$\frac{u^2}{\lambda^2} = \frac{R}{A_t} \Rightarrow R = \frac{u^2}{\lambda^2} A_t$

et $\pi = \frac{2}{\lambda^2}$ exprimé R en fonction de π

$\lambda^2 = \frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow R = \frac{u^2 \pi A_t}{2}$

$\pi = (1-\alpha) \alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} A_t$

Nous savons que l'entrepreneur innove avec la probabilité u

Pour trouver l'attente de profit on fait comme dans le modèle précédent la $R = u \pi A_t$

L'équation de profit est :

l'effet Arrow est considéré

$$U \pi_A - U p_A = 0$$

Comme un On dérive par rapport à U effet en

un agent est seul monopoleur

$$\begin{aligned} \pi_A - U p_A &= 0 \\ \pi - U p &= 0 \Rightarrow U = \frac{\pi}{p} \end{aligned}$$

Déduisons la croissance ici est

$$g = U(8-1)$$

$$= \frac{\pi}{p}(8-1)$$

la croissance sera autant plus élevée que le profit des inventeurs est élevé. En d'autres termes, ce qui pose le problème de financement de dépenses effectuées aux innovateurs. l'Etat doit définir des mécanismes qui permettent de protéger les innovations.

Effet Arrow

la religion et la croissance.

III - INSTITUTION ET CROISSANCE