Exercice $\underline{VI}$ PHY211-CORRIGES EXERCICES $\underline{VI}$, $\underline{VII}$ et $\underline{VIII}$-SERIE $\underline{VI}$ ①

Les équations du mouvement sont données par la RFD :

$$m_+ \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e\vec{E} \quad \text{et} \quad m_- \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}.$$

Le régime sinusoïdal (oscillations forcées) apparaît après le régime transitoire qui est de très ~~lente~~ courte durée. La vitesse $\vec{v}$ est alors de la même forme que le champ excitateur $\vec{E}$. Les vitesses sont alors marquées par une dépendance en temps par un facteur $e^{-i\omega t}$.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0\, e^{-i\omega t}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -i\omega \vec{v}_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -i\omega \vec{v}_e$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = \frac{e}{m_+}\vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_-}\vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_i = i\frac{e}{m_+\omega}\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{v}_e = -i\frac{e\vec{E}}{m_-\omega}}$$

Avec deux types de porteurs, la densité totale de courant est donnée par : $\vec{j} = \vec{j}_i + \vec{j}_e$

$$\vec{j}_i = ne\vec{v}_i \quad \text{et} \quad \vec{j}_e = -en\vec{v}_e \rightarrow \vec{j} = ne(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$$

$$\boxed{\vec{j} = i\frac{ne^2}{\omega}\left(\frac{1}{m_+} + \frac{1}{m_-}\right)\vec{E} = i\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E}}$$

$$\text{avec} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_+} + \frac{1}{m_-}$$

Pour la conductivité, $\vec{j}(\omega) = \gamma(\omega)\vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma(\omega) = i\frac{ne^2}{m\omega}}$$

$\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{B} \perp \vec{B}$ et $\vec{E} \perp \vec{B}$

2) Si $\vec{k}$ est le vecteur d'onde, $\vec{E}$ peut s'écrire :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$ en un point de vecteur position $\vec{r}$.

Le champ $\vec{B}$ qui ~~[illegible]~~ lui est associé est de la même forme

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ transverses signifie qu'ils sont tous les deux perpendiculaires à la direction de propagation (vecteur d'onde $\vec{k}$) $\Rightarrow$ $\vec{k}.\vec{E} = \vec{k}.\vec{B} = 0$. Nous allons le montrer à travers les équations de MG et MΦ

MG $\Rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ or $\rho = 0$ car on a autant d'ions que d'électrons.

$\Rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ $\Leftrightarrow$ $i\vec{k}\vec{E} = 0$ (compte tenu de la forme de $\vec{E}$)

$\Rightarrow$ $\vec{k} \perp \vec{E}$

MΦ $\Rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ $\Leftrightarrow$ $i\vec{k}.\vec{B} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{k} \perp \vec{B}$

donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses

Mais sont-ils orthogonaux ?

MF décrit : $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\Leftrightarrow$ $i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$

$\Rightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{1}{\omega}(\vec{k} \wedge \vec{E})$

$\Rightarrow$ $\vec{B} \perp \vec{k}$ et $\vec{B} \perp \vec{E}$

On a donc $\vec{k} \perp \vec{E}$, $\vec{k} \perp \vec{B}$ et $\vec{E} \perp \vec{B}$

le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct.

3) La relation de dispersion d'un milieu est la relation liant $\omega$ et le module $k$ du vecteur d'onde. Elle fait intervenir les propriétés du milieu de propagation. Le graphe $\omega = f(k)$ est appelé courbe de dispersion

On part de la relation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \iff i\vec{k}\wedge\vec{B} = \mu_0(\gamma - i\omega\varepsilon_0)\vec{E}$$

$$\vec{rot}\,\vec{B} = i\vec{k}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E}$$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{or} \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k}\wedge\vec{E}) \rightarrow i\vec{k}\wedge\left[\frac{1}{\omega}\vec{k}\wedge\vec{E}\right] = \mu_0(\gamma - i\omega\varepsilon_0)\vec{E}$$

$$\rightarrow -i\frac{k^2}{\omega}\vec{E} = i\mu_0\left(\frac{\gamma}{i} - \omega\varepsilon_0\right)\vec{E} \rightarrow -\frac{k^2}{\omega} = \mu_0\left(\frac{\gamma}{i} - \omega\varepsilon_0\right)$$

$$\Rightarrow k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \frac{n e^2\mu_0}{m} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}$$

Nature des ondes électromagnétiques.

La nature de l'onde dépendra de celle du nombre d'onde $k$.

* si $0 < \omega < \omega_p$, $k^2 < 0$ on pose $k = \pm i k''$ ($k''$ réel + ou −)

$k$ est imaginaire pur. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ varient suivant une loi du type

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{\pm k'' x}\, e^{-i\omega t} \; ; \; \vec{B} = \vec{B}_0\, e^{\pm kx}\, e^{-i\omega t}$$

Si on revient à des notations réelles :

$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \pm k'' x \cos \omega t$ ; $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp \pm k'' x \cos \omega t$,

on voit que les champs vibrent partout en phase, alors que leur amplitude varie d'un point à l'autre suivant une loi exponentielle. C'est tout à fait le contraire pour une onde progressive sans atténuation, c-à-d conservation de l'amplitude du signal et variation spatiale de la phase.

Donc pour $\omega < \omega_p = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$, l'onde disparaît très rapidement dans le milieu. On dit qu'on a une <u>onde évanescente</u>. Il n'y a pas de terme de propagation..

* Si $\omega > \omega_p$ on a $k^2 > 0$ donc $k$ réel

et par exemple $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$, $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kx - \omega t)}$

On a une onde progressive sans atténuation.

<u>Différence de phase</u>

Pour $k$ réel toutes les composantes de $\vec{k}$ sont réelles

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$, $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase.

<u>$v_\varphi$ et $v_g$</u>

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \rightarrow \boxed{\frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}}$

$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$ ($v_\varphi$ n'est réelle que pour $\omega > \omega_p$)

$v_\varphi > c$ car $\omega > \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2)$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} \qquad \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c}\frac{1}{2\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}\,2\omega$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega}$$

$$v_g = \frac{c\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega} < c$$

La vitesse de groupe est bornée supérieurement par c.

4) Il n'y a pas de mécanisme dissipatif agissant, du moins en valeur moyenne, sur les porteurs et l'onde ne peut être atténuée : le milieu peut, au plus, lui refuser de se propager.

EXERCICE VII

$$\vec{j}_i = ne\vec{v}_i \qquad \text{et} \qquad \vec{j}_e = -ne\vec{v}_e$$

$$\text{or} \quad \vec{v}_i = \frac{ie\vec{E}}{m_+\omega} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_e = -\frac{ie\vec{E}}{m\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_i = \frac{ine^2}{m_+\omega} \qquad \text{et} \qquad \gamma_e = i\frac{ne^2}{m_-\omega}$$

Les conductivités sont dans le rapport inverse des masses, et $m_+$ (masse de l'ion) est au moins celle d'un proton ~~...~~ c'est-à-dire près de 2000 fois celle de l'électron. On peut donc négliger la conductivité ionique.

6

2) La pulsation de coupure est $\omega_p$ : elle sépare les deux régimes d'ondes évanescentes, et d'ondes progressives,
$(\omega < \omega_p)$ $(\omega > \omega_p)$

La fréquence de coupure $\nu_c$ est donnée par :

$$\omega_p = 2\pi \nu_c \rightarrow \nu_c = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n e^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1{,}22 \cdot 10^{12} \cdot (1{,}6)^2 \cdot 10^{-38}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \; 0{,}9 \cdot 10^{-30}}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\nu_c \simeq 10 \text{ MHz}}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} \simeq 30 \text{ m}$$

$$\boxed{\lambda \simeq 30 \text{ m}}$$

# EXERCICE VIII

Relation de London $\Lambda \vec{j} = -\vec{A}$

$\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} = -\Lambda\,\vec{rot}\,\vec{j}$

MA → $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

MF → $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

rot de MA

$$\to \quad \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla}\wedge\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\wedge\vec{E}$$

$$\to \quad \vec{grad}(\underbrace{div\,\vec{B}}_{0}) \boxed{-\nabla^2\vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla}\wedge\vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$$

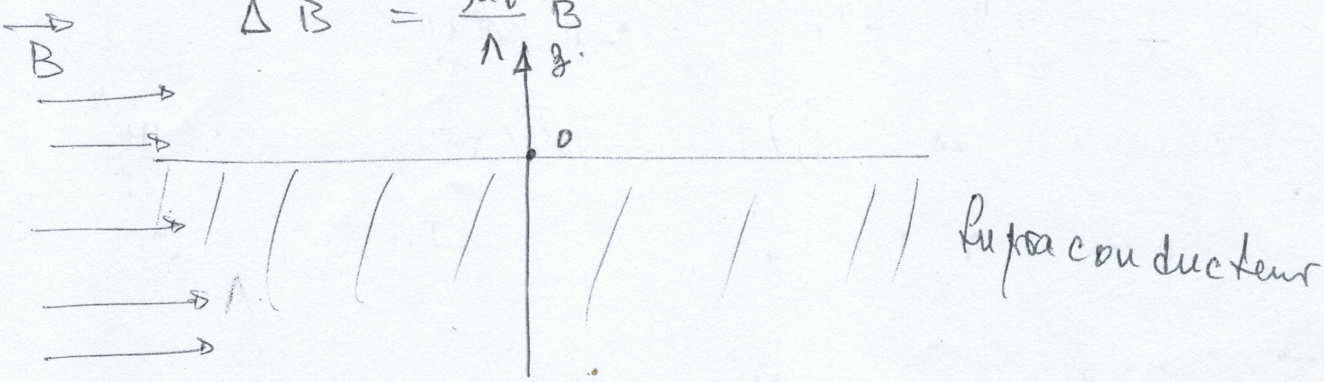
or $\vec{B} = -\Lambda\,\vec{rot}\,\vec{j} \to \vec{\nabla}\wedge\vec{j} = -\dfrac{\vec{B}}{\Lambda}$

$$\to \quad \nabla^2\vec{B} = \frac{\mu_0}{\Lambda}\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0}{\Lambda}\vec{B}}$$

2) Avec $\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t} = 0$ l'équation se réduit à :

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{\Lambda}\vec{B}$$




Le supraconducteur occupe le demi-espace $z<0$

La surface étant infinie, on imagine une variation de $\vec{B}$ avec $z$ seulement. On a alors :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \frac{\mu_0}{\Lambda}\vec{B} \iff \vec{B} = \vec{B}_0 \exp \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{\Lambda}}\cdot z$$

* On peut exclure l'hypothèse de ~~sa~~ croissance infinie pour $z \to -\infty$ et garder la solution décroissante exponentiellement

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \exp \sqrt{\frac{\mu_0}{\Lambda}}\cdot z$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0\, e^{\alpha z} \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0}{\Lambda}}$$

$\alpha$ est positif puisque pour le supraconducteur $z < 0$

La profondeur de pénétration du champ $\vec{B}$ est ~~donnée~~ définie par : $z_p = -\frac{1}{\alpha} = -\sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}}$ (pour le supra, $z<0$)

En conclusion, le champ magnétique est maintenu hors du supraconducteur, dans lequel il ne pénètre que sur une épaisseur de l'ordre de $\sqrt{\Lambda/\mu_0}$

3) L'équation en $\vec{B}$ devient

$$-\Delta\vec{B} = \mu_0 \,\overrightarrow{rot}(\vec{j}' + \vec{j}'') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t}$$

soit $\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\overrightarrow{rot}\,\vec{j}' - \mu_0\,\overrightarrow{rot}\,\vec{j}''$

or $\vec{j}' = \sigma\vec{E} \to \overrightarrow{rot}\,\vec{j}' = \overrightarrow{rot}(\sigma\vec{E}) = -\sigma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

et avec $\Lambda\vec{j}'' = -\vec{A}$ on a : $\overrightarrow{rot}\,\vec{j}'' = -\frac{1}{\Lambda}\vec{B}$

$$\to \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{\Lambda}\vec{B}$$

Avec $\vec{B}$ de la forme : $\vec{B} = \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

on a : $\Delta \vec{B} = -k^2 \vec{B}$, $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{B}$, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}$

$\rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\mu_0}{\Lambda} - i\omega\sigma\mu_0$

soit $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} - \frac{1}{\Lambda \varepsilon_0 \omega^2}\right)}$