

Chapitre 4 : Modèle ARIMA P, D, Q et

11-11-2024

Rappel chap 3 : Les processus stochastiques mixtes

$$Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + a_t$$

$$a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$$

Un modèle mixte est un processus stochastique non stationnaire :

Les processus stochastiques mixtes encore appelés processus TS-DS sont des séries non stationnaires dues à l'existence d'une tendance déterministe et stochastique. Il s'écrit :

$$Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + a_t$$

$$a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$$

Stationnariser le TS-DS consiste à contrôler la composante stochastique en y appliquant le filtre aux différences.

$$\text{Soit le TS-DS : } Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + a_t$$

$$a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$$

solution

On écrit
les modèles
à condition
d'erreur
ssi les
modèles
sont
cointégrés

$$- C_t \sim I(1) \text{ et } R_t \sim I(1)$$

$$- \text{Soit } C_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow C_t - \beta_1 - \beta_2 R_t = \varepsilon_t \text{ or } \varepsilon_t \sim I(0)$$

Le vecteur de cointégration $(1, -\beta_1, -\beta_2)$ est unique.

* Ecriture du Modèle à Correction d'Erreur (MCE)

Etape 1:

Soit le modèle : $C_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + \varepsilon_t$

→ On l'estime par les MCO $\Rightarrow \hat{C}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 R_t$

→ On extrait le résidu $\Rightarrow \hat{\varepsilon}_t = C_t - \hat{C}_t = C_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 R_t$

Etape 2

→ Relation dynamique

$$\Delta C_t = \alpha_1 \Delta R_{t-1} + \delta \hat{\varepsilon}_{t-1}$$

→ on l'estime par les MCO

$$\Delta \hat{C}_t = \hat{\alpha}_1 \Delta R_{t-1} + \hat{\delta} \hat{\varepsilon}_{t-1} \quad \hat{\delta} > 0$$

$$\Rightarrow Y_t - Y_{t-1} = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + a_t$$

$$\boxed{\Delta Y_t = \mu + \beta t + (\rho - 1)Y_{t-1} + a_t}$$

On parle
de compo-
sante

stochastique

lorsqu'on n'a
pas la maîtrise

pas

Il est donc recommandé de faire un test de racine unitaire sur le paramètre de la composante stochastique.

Test de racine unitaire

* Hypothèses :

$$H_0: \rho - 1 = 0$$

$$\text{ou } \rho = 1$$

Non stationnarité

$$\neq H_1: \rho - 1 \neq 0$$

$$\text{ou } \rho \neq 1$$

Stationnarité

* Statistiques

$$\text{Dickey-Fuller: } DF_{cal} = \frac{|\hat{\rho} - 1|}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho} - 1}} \sim DF_{lu}$$

* Décision :

Si $DF_{cal} > DF_{lu} \Rightarrow$ accepter l'hypothèse H_1

Si $DF_{cal} < DF_{lu} \Rightarrow$ accepter l'hypothèse H_0

Sous l'hypothèse H_0 , on aboutit à la conclusion que le TS-DS est **non stationnaire**. Par contre sous l'hypothèse H_1 , la série Y_t est **stationnaire** autour d'une **tendance déterministe**. Si la composante déterministe est maîtrisée, la série Y_t est **simplement stationnaire**.

N.B: Dire qu'une série est **non stationnaire** c'est encore dire qu'elle comporte une **tendance stochastique**.

Délégué Nsangou Mohamed

Chap 4 : Modèles ARIMA et tests de racine unitaire

Théorème de Wold :

Tout processus stochastique stationnaire peut être généré par la somme d'une constante et d'une combinaison linéaire, parfois infinie, des composantes courantes et passées d'un bruit blanc.

Ce théorème peut être traduit par l'équation :

$$Y_t = \mu + a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_2 a_{t-2} + \dots +$$

Appliquons l'espérance :

$$E(Y_t) = E(\mu) + \underbrace{E(a_t)}_0 + \varphi_1 \underbrace{E(a_{t-1})}_0 + \varphi_2 \underbrace{E(a_{t-2})}_0 + \dots +$$

$$E(Y_t) = E(\mu)$$

$$\boxed{E(Y_t) = \mu_Y = \mu}$$

Déterminons la variance :

$$\text{Var}(Y_t) = E[Y_t - E(Y_t)]^2$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y_t) &= E(\mu + a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_2 a_{t-2} + \dots + \mu)^2 \\
&= E[(a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_2 a_{t-2} + \dots)(a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \dots)] \\
&= E[a_t^2 + \varphi_1^2 a_{t-1}^2 + \varphi_2^2 a_{t-2}^2 + \sum_i \sum_j \varphi_i \varphi_j a_{t-i} a_{t-j} + \dots] \\
&= E(a_t^2) + \varphi_1^2 E(a_{t-1}^2) + \varphi_2^2 E(a_{t-2}^2) + \dots + \\
&= \sigma_a^2 + \varphi_1^2 \sigma_a^2 + \varphi_2^2 \sigma_a^2 + \dots + \\
&= (1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots) \sigma_a^2 \\
&= (1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^2) \sigma_a^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Var}(Y_t) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^2 + 1 \right) \sigma_a^2}$$

b) Le processus au stochastique
auto régressif stationnaire

Quelles sont les conditions de stationnarité et d'inversibilité du processus AR(p)?

Soit le processus AR(p):

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + a_t$$

Un processus $AR(p)$ est **stationnaire** si les racines associées à son polynôme retard sont hors du cerce d'unité c-à-d **strictement supérieur à 1** ou **inférieur à -1** (on dit que $|L| > 1$ où L est la racine du polynôme).

En introduisant l'opérateur retard L , on a :

$$Y_t = \mu + \varphi_1 L Y_t + \varphi_2 L^2 Y_t + \dots + \varphi_p L^p Y_t + a_t$$

$$Y_t - \varphi_1 L Y_t - \varphi_2 L^2 Y_t - \dots - \varphi_p L^p Y_t = \mu + a_t$$

$$\underbrace{(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p)}_{\varphi_p(L)} Y_t = \mu + a_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_p(L) Y_t = \mu + a_t}$$

Le $AR(p)$ est alors **stationnaire** si les racines associées à son polynôme caractéristique notée $\varphi_p(L)$ sont hors du cercle d'unité.

Dans le cas d'un $AR(1)$, le processus Y_t est **stationnaire** si les opérations suivantes sont effectuées :

Soit le processus AR(1): $Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + a_t$

En introduisant l'opérateur retard L:

$$Y_t = \mu + \varphi_1 L Y_t + a_t \Rightarrow (Y_t - \varphi_1 L Y_t) = \mu + a_t$$

$$\Rightarrow (1 - \varphi_1 L) Y_t = \mu + a_t$$

En résolvant l'équation, on a: $1 - \varphi_1(L) = 0$

$$\Rightarrow 1 = \varphi_1 \cdot L$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\varphi_1}$$

Y_t est stationnaire si

$$|L| = \left| \frac{1}{\varphi_1} \right| > 1$$

Puisque la condition de stationnarité est respectée, le processus AR(1) stationnaire est **automatiquement inversible** c-à-d que le **AR(1)** peut s'écrire comme un **MA infini**. Le **MA** est donc une combinaison linéaire de ~~bruit blanc~~ des valeurs infinies d'un bruit blanc c-à-d

$$AR(1) \rightarrow MA(\infty).$$

On peut **inverser** un AR de deux manières:

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + a_t \quad (1)$$

$$\rightarrow Y_{t-1} = \mu + \varphi_1 Y_{t-2} + a_{t-1} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{ dans } \textcircled{1} \rightarrow Y_t &= \mu + \varphi_1 (\mu + \varphi_1 Y_{t-2} + a_{t-1}) + a_t \\ &= \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 Y_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t \quad (3) \end{aligned}$$

En différenciant de 2 périodes, on a:

$$Y_{t-2} = \mu + \varphi_1 Y_{t-3} + a_{t-2} \quad (4)$$

$$\textcircled{4} \text{ dans } \textcircled{3} \rightarrow Y_t = \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 (\mu + \varphi_1 Y_{t-3} + a_{t-2}) + \varphi_1 a_{t-1} + a_t$$

$$Y_t = \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 \mu + \varphi_1^3 Y_{t-3} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t$$

Ainsi, en différenciant de p périodes, on a:

$$Y_t = \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 \mu + \dots + \varphi_1^p \mu + \varphi_1^{p+1} Y_{t-(p+1)} + \varphi_1^p a_{t-p} + \dots + \varphi_1^2 a_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t$$

$$\rightarrow Y_t = \sum_{i=0}^p \varphi_1^i \mu + \varphi_1^{(p+1)} Y_{t-(p+1)} + \sum_{i=0}^p \varphi_1^i a_{t-i}$$

$$\rightarrow Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \mu$$

On calcule: $\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_1^{(p+1)} Y_{t-(p+1)} = 0$

A l'infini, on a:

$$Y_t = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i a_{t-i}$$

N.B: $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^i = \frac{1}{1-\varphi_1}$

$\Rightarrow Y_t = \mu \left(\frac{1}{1-\varphi_1} \right) + a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \dots + 1$

$\Rightarrow AR(1) \rightarrow MA(\infty)$

On a vient décrire le processus $AR(1)$ comme un $MA(\infty)$

Méthode 2:

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + a_t$$

On introduit L :

$$Y_t = \mu + \varphi_1 L Y_t + a_t$$

$\Rightarrow (1 - \varphi_1 L) Y_t = \mu + a_t$

$$Y_t = \mu \times \frac{1}{1-\varphi_1 L} + a_t \times \frac{1}{1-\varphi_1 L}$$

Division euclidienne de 1 par $1 - \varphi_1 L$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \overline{) 1 - \varphi_1 L} \\ - 1 + \varphi_1 L \quad \underline{1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots +} \\ \varphi_1 L \\ - \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 \\ \varphi_1^2 L^2 \end{array}$$

$$\frac{1}{1-\varphi_1 L} = 1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots +$$

Par analogie: $\frac{1}{1-\varphi_1} = 1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \dots +$

On a:

$$Y_t = \mu (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \dots +) + (1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots +) a_t$$

$$= \mu \left(\frac{1}{1-\varphi_1} \right) + a_t + \varphi_1 L a_t + \varphi_1^2 L^2 a_t + \dots +$$

$$Y_t = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i + a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \dots +$$

Exercices:

Soient les processus suivants:

(1) $Y_t = 7 + 0,1 Y_{t-1} + a_t$

(2) $Y_t = 10 + 0,2 Y_{t-1} + 0,7 Y_{t-2} + a_t$

(3) $Y_t = 20 + 2,1 Y_{t-1} + 1,2 Y_{t-2} + 0,4 Y_{t-3} + a_t$

TAF:

a) Ces processus sont-ils stationnaires?
quelle en est la conséquence?

b) Dans le cas du premier exemple, appliquer de deux manières cette conséquence.

Solution

$$(1) \quad Y_t = 7 + 0,1 Y_{t-1} + a_t$$

On introduit L :

$$Y_t = 7 + 0,1 L Y_t \Rightarrow (1 - 0,1 L) Y_t = 7 + a_t$$

Cherchons la racine:

$$(1 - 0,1 L) = 0 \Rightarrow 1 = 0,1 L \Rightarrow L = \frac{1}{0,1} = 10 > 1$$

Le processus $AR(1)$ est stationnaire donc il est immédiatement inversible.

Puisque le $AR(1)$ est stationnaire donc il est automatiquement inversible c-à-d qu'il peut s'écrire comme un $MA(\infty)$.

Écrivons le $AR(1) \rightarrow MA(\infty)$

Méthode 1:

$$Y_t = 7 + 0,1 Y_{t-1} + a_t \quad (1)$$

En différenciant d'une période:

$$Y_{t-1} = 7 + 0,1 Y_{t-2} + a_{t-1} \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans } (1) \Rightarrow Y_t = 7 + 0,1 (7 + 0,1 Y_{t-2} + a_{t-1}) + a_t$$

$$Y_t = 7 + 0,7 + (0,1)^2 Y_{t-2} + 0,1 a_{t-1} + a_t \quad (3)$$

En différenciant de deux périodes:

$$Y_{t-2} = 7 + 0,1 Y_{t-3} + a_{t-2} \quad (4)$$

$$\textcircled{4} \text{ ds } \textcircled{3} \Rightarrow Y_t = 7 + 0,7 + (0,1)^2 (7 + 0,1 Y_{t-3} + a_{t-2}) + 0,1 a_{t-1} + a_t$$

$$= 7 + 0,1 \times 7 + (0,1)^2 \times 7 + (0,1)^3 Y_{t-3} + (0,1)^2 a_{t-2} + 0,1 a_{t-1} + a_t$$

En différenciant de p périodes on a:

$$Y_t = 7 + 0,1 \times 7 + (0,1)^2 \times 7 + \dots + (0,1)^p \times 7 + (0,1)^{p+1} Y_{t-(p+1)} + (0,1)^p a_{t-p} + \dots + (0,1)^2 a_{t-2} + 0,1 \times a_{t-1} + a_t$$

$$Y_t = \sum_{i=0}^p 7 \times (0,1)^i + (0,1)^{p+1} Y_{t-(p+1)} + \sum_{i=0}^p (0,1)^i a_{t-i}$$

$$\text{On calcule } \lim_{p \rightarrow \infty} (0,1)^{p+1} Y_{t-(p+1)} = 0$$

$$\Rightarrow Y_t = 7 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (0,1)^i + \sum_{i=0}^{\infty} (0,1)^i a_{t-i}$$

Méthode 2

$$Y_t = 7 + 0,1 Y_{t-1} + a_t$$

En introduisant L :

$$Y_t = 7 + 0,1 L Y_t + a_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0,1 L) Y_t = 7 + a_t$$

$$Y_t = \frac{1}{1-0,1} + \frac{1}{1-0,1L} \times a_t$$

La division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 1 \quad | \quad 1-0,1L \\ - 1+0,1L \quad | \quad 1+0,1L+(0,1)^2L^2+\dots+ \\ \hline 0,1L \\ - 0,1L+(0,1)^2L^2 \\ \hline (0,1)^2L^2 \\ - (0,1)^2L^2+(0,1)^3L^3 \\ \hline (0,1)^3L^3 \end{array}$$

Par analogie : $\frac{1}{1-0,1} = 1+0,1+(0,1)^2+\dots+$

$$Y_t = 7(1+0,1+(0,1)^2+\dots) + a_t(1+0,1L+(0,1)^2L^2+\dots)$$

$$\begin{aligned} Y_t &= 7(1+0,1+(0,1)^2+\dots) + a_t + 0,1L \times a_t + (0,1)^2L^2a_t + \dots \\ &= 7(1+0,1+(0,1)^2+\dots) + a_t + 0,1 \times a_{t-1} + (0,1)^2a_{t-2} + \dots \\ &= 7 \sum_{i=0}^{\infty} (0,1)^i + a_t + 0,1 \times a_{t-1} + (0,1)^2a_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

$$(2) \quad Y_t = 10 + 0,2 Y_{t-1} + 0,7 Y_{t-2} + a_t$$

On introduit L :

$$\cancel{Y_t} = \cancel{10} + \cancel{0,2} \cancel{Y_{t-1}}$$