

Mardi, 24 Septembre 2024

Chapitre 01: LES MODALITES DETERMINISTES

1- Introduction

Une série temporelle est la donnée d'une observation relative à une série chronologique variable apparaissant dans les calculs du temps avant de débiter. Il peut s'agir des chiffres indiquant des productions hebdomadaires d'une denrée quelconque ou les ventes mensuelles d'un produit donné ou encore les niveaux de prévision annuelle.

Les séries temporelles sont étudiées pour :

- Comprendre le passé des phénomènes
- effectuer des prévisions sur les variables étudiées. (sur un plan)

2- Composantes d'une série temporelle

Analyser une série temporelle consiste à déterminer les différentes caractéristiques des mouvements observés au niveau de l'évolution de la table à étudier. Dans ce qu'il est convenu d'appeler approche classique de l'étude des séries temporelles, ces différentes composantes sont :

→ la tendance (T_t) ou trende (T_t)

Sensé d'écouter le mouvement de long terme
ou de fond ou encore structurel du
phénomène. Et ce mouvement est tradition-
nellement représenté par des formes analyti-
ques simples :

- polynômiale
- logarithmique
- cyclique
- logistique

S'est ainsi qu'en économie la tendance
contient des cycles long de **Kondratieff**
(cycle à périodicité de 40 à 60 ans)

- De Kuznets (cycle de 20 ans)
- De Juglar (cycle de 10 ans)

→ la composante cyclique notée C_t en
conjuncture, elle est représentée par le cycle
de :

- Kitchin (4 à 5 ans)

S.T : Série
Temporelle

Dans la plupart des travaux sur les S.T.
la tendance et le cycle sont regroupés
en une seule tendance appelée **extra sa-**
sonnière (T_t)

→ la composante saisonnière (S_t) il s'
agit d'une composante cyclique ^{relativement} régulière
de période intra-annuelle et qui corres-
pond souvent à des événements de mode,
de climat

→ la composante résiduelle (R_t) elle
rassemble tous ce que les autres com-

posantes n'ont pas pu expliquer du phénomène observé. Elle contient donc de nombreuses fluctuations en particulier ~~et~~ accidentel donc le caractère est **exceptionnel** et **imprévisible** (catastrophe naturelle, guerre, grève, ...). Comme par hypothèse, ce type de phénomène doit être corrigé, le résidu présente en générale une allure aléatoire plus ou moins stable au tour de sa moyenne.

La technique de **décomposition** se compose de ces parties constituantes des mouvements décrits par les S.T, repose sur un modèle qui s'autorise. Ce modèle porte le nom de **schéma de décomposition**. Il en existe essentiellement 3 grands types

→ le **schéma additif** qui suppose l'additivité (l'indépendance) de différentes composantes. Il s'écrit :

$$I_t = T_t + C_t + S_t \Rightarrow E_t + S_t + R_t$$

Dans ce schéma, la saisonnalité est corrigée en amplitude et en période.

→ le **schéma multiplicatif**

$$I_t = T_t * C_t * S_t + R_t \Rightarrow E_t * S_t * R_t$$

Dans lequel la composante saisonnière est liée à l'extra-saisonnière (saisonnalité souple avec variation de l'amplitude au cours du temps.)

→ le **schéma multiplicatif complet** où toutes les composantes s'influencent de

manière multiplicative.

$$Y_t = T_t \times C_t \times S_t \times R_t \Rightarrow T_t \times S_t \times R_t$$

De manière générale, il est supposé que les valeurs observées de Y résultent des influences exercées par les 04 composantes que sont :

• La tendance (T_t) influence Y_t en plus ou moins par les effets combinés de la composante cyclique (C_t) de la composante saisonnière (S_t) et de la composante résiduelle R_t . Une autre alternative consiste à supposer que la valeur observée Y_t s'exprime en fonction des T_t , C_t , S_t , R_t et Y_{t-1} . La valeur observée de la période précédente.

En ^{général}, la tendance R_t constitue la tendance la plus importante de la série observée. Cette composante peut être étudiée en 02 phases :

→ l'utilisation des techniques de régression pour ajuster une tendance aux données de la variance étudiées

l'utilisation des techniques de lissage pour modéliser les contrastes dans la ~~modélisation~~ représentation des ~~modèles~~ l'évolution de la variables étudiées.

3 - l'étude de la tendance (quelques illustrations)

Lorsque le confrontement sur une longue période de la variable a étudiée a une configuration qui donne à penser à une ~~note~~ ~~te~~, il peut être réaliste d'ajuster la ~~tendance~~ ~~à~~ ~~étude~~ observée par une droite de type :

$$Y_t = f(t) = a + bt$$

De manière concrète, on retient comme hypothèse un trend linéaire de type lorsque on a des raisons de supposer que la variable Y_t varie d'un montant absolu b d'une date à une autre. En prévision, on aura

$$\hat{Y}_{T+1} = a + b(T+1)$$

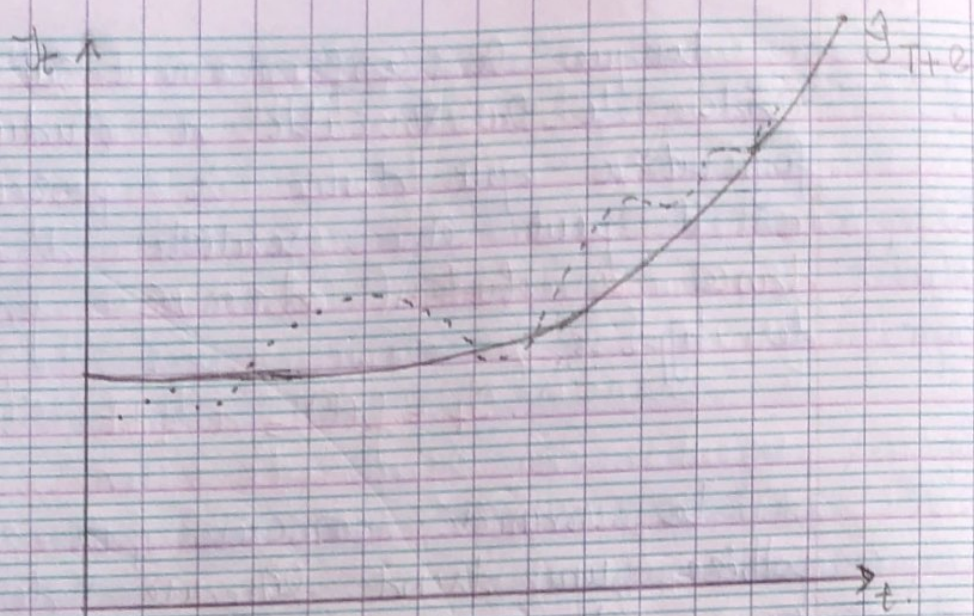
Lorsque le confrontement, sur une longue période, de la variable étudiée exhibe une configuration qui donne à penser qu'elle suit à un ~~taux~~ ~~constant~~, il peut être réaliste d'ajuster la tendance observée par une fonction de type :

$$Y_t = f(t) = \alpha e^{\beta t}$$

Pour estimer α et β il suffit de considérer l'équation $\log Y_t = \log \alpha + \beta t$;

$$\beta = \frac{d \log Y_t}{dt}$$

En prévision pour t périodes, on aura : $\hat{Y}_{T+L} = \alpha e^{\beta(T+L)}$

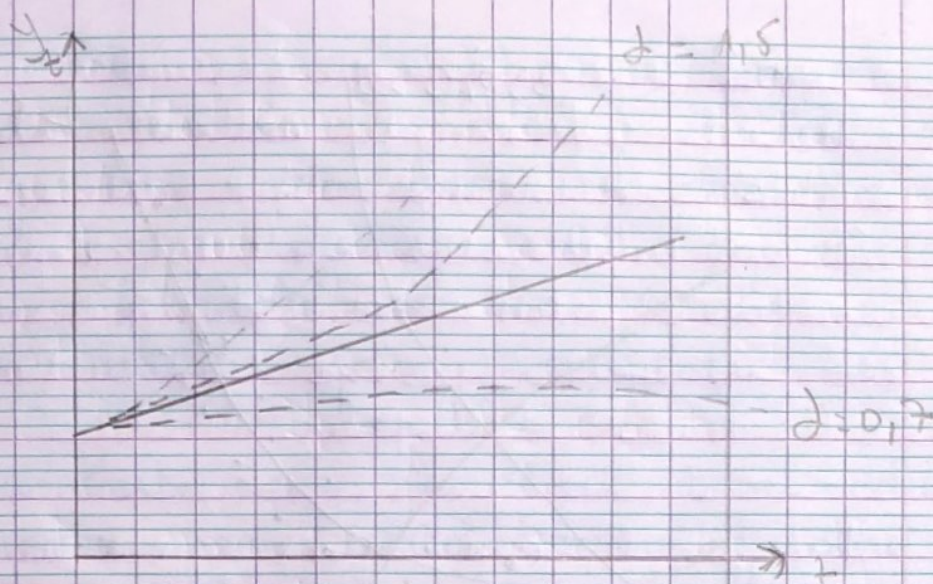


Courbe de croissance exponentielle.

Une autre procédure d'extrapolation pourra être basée sur un modèle à trend auto-régressif:

$$Y_t = \delta + \delta Y_{t-1}$$

En ajustant le trend, par un modèle de ce type, on pourrait opter pour une valeur $\delta \neq 0$. Dans ce cas, δ représente le taux de variation de la série Y . Si d'autre part on a $\delta = 1$, avec $\delta \neq 0$, la série extrapolée croît d'un montant absolu d'une période à l'autre. Dans le graphique ci-après, nous représenterons le modèle de trend auto-régressif pour différentes valeurs de δ (avec $\delta = 1$ dans tous les cas).

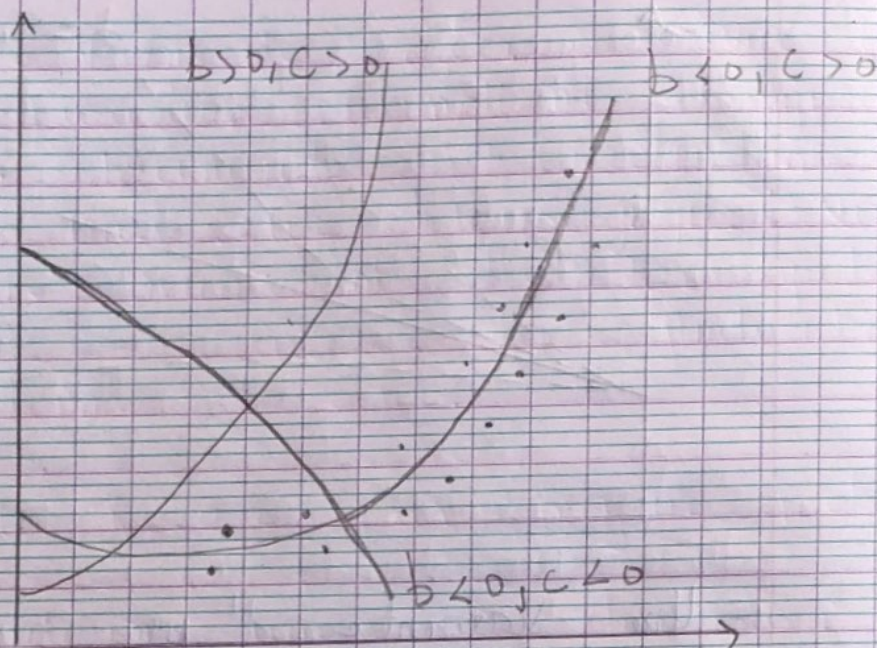


Une variante d'un modèle précédent est le modèle de trend autoregressif logarithmique : $\log y_t = \theta + d \log y_{t-1}$.

Le comportement à long terme de la variable à étudier pourrait avoir une configuration donnant à penser qu'il serait réaliste d'ajuster les données observées par un trend quadratique :

$$y_t = f(t) = a + bt + ct^2$$

si b et c sont tous les deux (ou) positifs, y_t s'accroît toujours d'une date à l'autre. si $b < 0$ et $c > 0$, y_t croît d'abord puis décroît pour atteindre ensuite un maximum. si b et $c < 0$, y_t décroît toujours. Les différents cas de figures sont illustrés ci-après (avec $a > 0$ dans tous les cas).

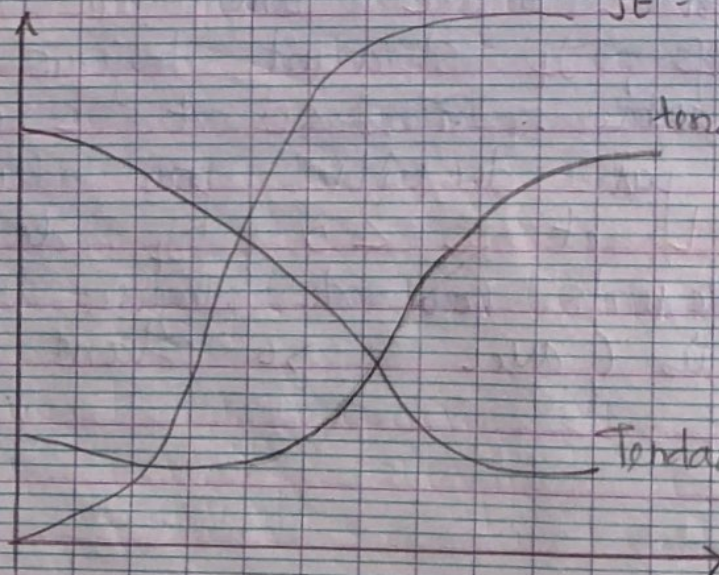


En fin, un modèle quelques peu plus compliqué (en terme d'estimation) est le modèle à tendance logarithmique.

$$y_t = f(t) = \frac{1}{k + ab^t} \quad b > 0$$

$$k_1 - k_2 / b$$

$$y_t = e$$



Tendance logarithmique
avec $0 < b < 1$

Tendance logarithmique
 $b < 1$

Cette équation est non linéaire (suivant les paramètres a , b , et k) et doit être estimée par une procédure d'estimation pour modèle non linéaire. Cette équation fonction dont le tracé est une courbe en S peut être utilisée pour représenter les ventes d'un produit appelé saturer le marché (de telle sorte que le stock total du bien en question, en circulation, approche un certain plafond, ou de manière équivalente, se heurte à des difficultés pour être écoulé).

D'autres courbes en S peuvent être utilisées, en plus de la courbe logistique. Une fonction simple de courbe en forme S peut être utilisée, en plus de la courbe pour représenter, modéliser les ventes d'un marché en saturation à savoir :

$$J_t = f(t) = e^{k_1 - k_2/t}$$

Remarquons qu'en prenant le logarithme des deux côtés, nous obtenons une équation linéaire par rapport aux paramètres, susceptible d'être estimée par les moindres carrés.

$$\log J_t = k_1 - k_2/t$$

Il importe de noter que cette courbe commence à l'origine et croît plus vite que la courbe logistique.

4 - Les techniques de lissage

Nous venons de passer en revue différentes procédures permettant d'ajuster un modèle déterministe à la tendance observée d'une série chronologique. Nous nous proposons maintenant d'étudier quelques procédés de lissage des fluctuations à court terme des séries.

1 - le lissage par moyens mobiles

Considérons une série chronologique $y_1, y_2, \dots, y_t$ que nous désignons y une moyenne de la série (y_t) $1 \leq t \leq T$ et la longueur P est donnée par l'opérateur qui transforme cette série y en une nouvelle série z par le calcul de la suite des moyennes telle que :

$$z_t = z_t + \frac{(P+1)}{2} = \frac{1}{P} (y_{t+1} + \dots + y_{t+P})$$

$$= \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P y_{t+k} \quad (t = 1, 2, \dots, T-P)$$

N.B : Chaque moyenne successive est effectuée à la date t correspondant au milieu de la période qui s'étend entre l'instant $t + 1$ et l'instant $t + P$.

$$t = \frac{1}{2} [(t+1) + (t+P)] = t + \frac{P+1}{2}$$

lorsque P est impaire cette date de milieu de période, correspond à l'une des dates d'observation, si P est paire,

cette date le milieu de période correspond au Centre de l'intervalle séparant deux dates consécutives d'observation.

Notons symboliquement l'opération moyenne mobile de longueur P effectuée sur la série y par $Z_t = M_P(y_t)$

Exemple 1: la moyenne mobile de longueur $P=5$ avec $T=9$, $Z_t = m_P(y_t)$. la nouvelle série Z est alors donnée par $Z_t = Z_t + \frac{P+1}{2}$ Pour $t = 0, 1, \dots, 4$

$$Z_3 = \frac{1}{5} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

$$Z_4 = \frac{1}{5} (y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$$

$$Z_5 = \frac{1}{5} (y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7)$$

$$Z_6 = \frac{1}{5} (y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8)$$

$$Z_7 = \frac{1}{5} (y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9)$$

$$T = P+1 = 9 - 5 + 1 = 5.$$

Tableau:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_t	52	58	61	57	69	72	70	77	73
Z_t	-	-	59.4	63.4	65.8	69	72.2	-	-

Exemple 2: moyenne mobile de longueur

$P=4$ et $T=8$

la nouvelle série Z est alors donnée par les Z_t tel que : $Z_t = Z_t + \frac{P+1}{2}$ avec $t=0, \dots, 4$. On a :

$$Z_{2,5} = \frac{1}{4} (J_1 + \dots + J_4)$$

$$Z_{3,5} = \frac{1}{4} (J_2 + \dots + J_5)$$

$$Z_{4,5} = \frac{1}{4} (J_3 + \dots + J_8)$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8
J_t	120	130	127	134	140	132	148	150
Z_t	-	127,75	132,75	133,25	138,5	142,5		

$$Z_{2,5} = \frac{1}{4} \frac{120 + \dots + 134}{4} = 127,75$$

$$Z_{3,5} = \frac{150 + 127 + 134 + 140}{4} = 137,75$$

$$Z_{4,5} = \frac{127 + 134 + 140 + 132}{4} = 133,25$$

On remarque dans les exemples ci-dessus un certain nombre de valeurs perdues pendant aux extrémités de l'intervalle de variation de la série originale sont perdues :

Les des moyennes mobiles pour :
 c'est à dire lorsque $P=2M$ avec M entier naturel.

Dans la pratique, les séries temporelles comportent généralement des périodes paires (donc $p=4$; $p=12$). En conséquence les calculs de moyennes mobiles porte souvent sur les périodes paires. Il apparaît par conséquent gênant d'obtenir par l'opération de M.M. une série ne se rapportant pas aux mêmes périodes date que les dates d'observation de la série étudiée. Ainsi convient-on d'affecter à une date d'observation déterminée la moyenne arithmétique de deux moyennes qui l'encadrent. Il en résulte qu'en pratique, on définit une moyenne mobile de longueur paire par :

$$\begin{aligned} Z_t = Z_{t+n} &= \frac{1}{2} \left[Z_{t+n} + Z_{t+n} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n} (y_t + y_{t+1} + \dots + y_{t+2n-1}) \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{2} y_t + (y_{t+1} + \dots + y_{t+2n-1}) + \frac{1}{2} y_{t+2n} \right] \end{aligned}$$

avec $t = 1, \dots, T-p$

En somme, cette convention s'interprète de la façon suivante : "La détermination d'une moyenne mobile de longueur paire ($n \geq 2n, n \in \mathbb{N}$) correspondant à une date d'observation t " revient à effectuer le calcul d'une moyenne pondérée des $2n+1$ observations en considérant la date t en

Un tel modèle affectant les poids :
 - $\frac{1}{2}$ aux deux observations extrêmes
 - 1 aux $n-1$ observations intermédiaires

Exemple : moyenne mobile de longueur $P = 2n + 1$ et $T = 8$.

$Q = \alpha + \beta T + \gamma T^2$
 $8Q = 1 + \mu_0$

la question se pose est pourquoi cette pondération ?

Cette pondération a été choisie à cause du fait qu'une série économique est proche de ce qu'il a fait précédemment.

On a donc :

$$Z_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} Y_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_4) + \frac{1}{2} Y_5 \right)$$

$$Z_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} Y_2 + (Y_3 + Y_4 + Y_5) + \frac{1}{2} Y_6 \right)$$

$$\vdots$$

$$Z_{T-2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} Y_{T-4} + (Y_{T-3} + Y_{T-2} + Y_{T-1}) + \frac{1}{2} Y_T \right)$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_0	120	130	127	134	140	132	148	150
Z_t	-	-	130,25	133	135,8	140,5	-	-

$$Z_3 = \frac{120/2 + 130 + 127 + 134 + 140/2}{4} = 130,25$$

2. Autre moyen de lissage : le lissage simple ou exponentielle.

Le lissage simple revient à générer une nouvelle série à partir de la série initiale et cela donnerait :

$$Y_t = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \dots$$

avec $0 < \alpha < 1$

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1$$

Autrement dit, tout dépend de la valeur de α

qu'on se donne.

OS - 10/2024 - la série temporelle est **déterministe** si on peut avoir sa valeur au fur et à mesure qu'on avance dans le temps.

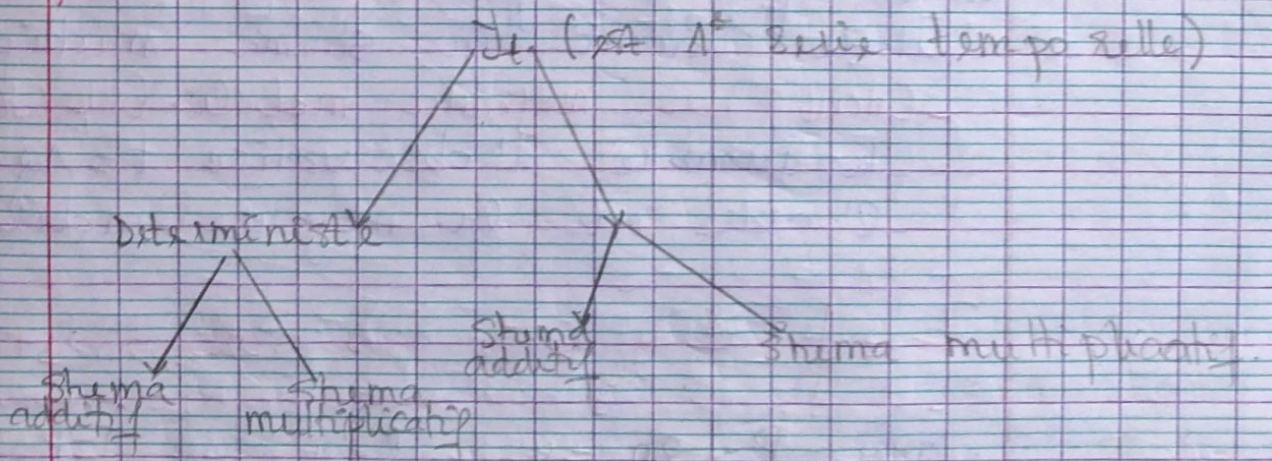
- la série temporelle est **aléatoire** car on ne peut prévoir sa valeur dans le temps.

L'objectif de la série temporelle est la **prévision**. Une série saisonnière est caractérisée par :

* la **répétitivité**

Étapes de désaisonnalisation

① **Calcul de la tendance ou le Trend**, soit déterministe, soit aléatoire. Lorsque la série est aléatoire, on la désaisonnalise avec la **méthode des moyennes mobiles** ou lorsque la série est déterministe on extrait la tendance avec la **méthode des M.C.D**.



Exple : soit le tableau ci-dessous :

Dans le schéma multiplicatif ($T_t = E_t \times S_t + R_t$) il existe au moins une addition ou dans un schéma multiplicatif complet ($T_t = E_t \times S_t \times R_t$) il

existe ou une addition, tout est multiplicatif.

J_t	$Mp(J_t)$	$rg = \frac{J_t}{Mp(J_t)}$	
1 1248	-	$dif = J_t - Mp(J_t)$	184.1
2 1392	-	-	1745
3 1057	1669,34	- 612,74	1565
4 3159	1583,80	1575,53	1705
5 891	1550,09	- 659,78	1484
6 1065	1532,90	- 464,79	1418
7 1118	1612,66	- 415,30	1624
8 2934	1674,84	1321,54	1480
9 1138	1707	- 536,64	1731
10 1456	1707	- 251,76	1809
11 1224	-	-	1722
12 3090	-	-	1636

I.AF : - Désaisonnaliser la série si on fait l'hypothèse que la série est aléatoire suivant un schéma multiplicatif.

- Calcul des moyennes mobiles ($Mp(J_t)$)

- le nombre d'observation $t = 12$

- l'ordre de la moyenne mobile $P = 4$

$$J_t = \frac{1}{P} \left[\frac{1}{2} J_t + J_{t+1} + \dots + J_{t+2n-1} + \frac{1}{2} J_{t+2n} \right]$$

$$\text{avec } P = 2n = 4 \quad l = 1, \dots, T-P$$

$$t = 12 \quad k = 1, \dots, 8$$

→ Dans le cas d'un schéma additif il est recommandé d'appliquer la différence

à la tendance (à la moyenne mobile).

$$d_j = Y_t - M_p(Y_t)$$

→ Puisque le schéma est multiplicatif, il est recommandé de procéder au rapport de la tendance.

$$r_j = \frac{Y_t}{M_p(Y_t)}$$

→ Calcul des coefficients saisonniers
Les coef saisonniers sont approximés par une moyenne mobile de longueur p . Le coef saisonnier S_j correspond donc à la moyenne des $d_{ij} = S_j$ correspond au coef saisonnier de la j -ième période (j et trimestriel) on a :
 $S_j = \frac{1}{n} \sum d_{ij}$ si $j = 4$ (trimestre) par exemple on calculera 4 coef saisonniers.
Appliquons les coef saisonniers.

$$A.N : S_1 = \frac{(-657,78 - 536,64)}{2} = -598,01$$

$$S_2 = \frac{(-444,79 - 251,67)}{2} = -358,23$$

$$S_3 = \frac{(-612,74 - 415,30)}{2} = -514,02$$

$$S_4 = \frac{(1573,3 + 1321,54)}{2} = 1448,42$$

* Pour se rassurer que les coef saisonniers sont exacts, on vérifie la relation suivante : $\sum S_j = 0$ si le schéma additif

→ si le schéma additif on $\sum S_j = P = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

Si le schéma est multiplicatif. Nous voulons alors chercher une estimation.

→ Si $\sum s_j = 0$, ou $\neq P$ il est donc possible de déterminer la seule courbée des variations saisonnières.

$y_j = Y_j - S_j$, si le schéma est additif.

$\hat{y}_j = Y_j / S_j$ si le schéma est multiplicatif.

Revenons à notre exple :

$$\sum s_j = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = (-598,01 - 358,23 + 1448,42 + 514,02) = -22,01 \neq 0$$

Il est donc recommandé de déterminer la valeur des coefficients saisonniers notée $s_j^* = s_j - \bar{s}$ avec $\bar{s} = \frac{1}{P} \sum s_j$

$$\bar{s} = \frac{-598,01 - 358,23 - 514,02 + 1448,42}{4} = -5,51$$

$$\bar{s} = 5,51$$

$$- s_1^* = s_1 - \bar{s} = (-598,01 - (-5,51)) = -592,50$$

$$- s_2^* = s_2 - \bar{s} = (-358,23 - (-5,51)) = -352,72$$

$$- s_3^* = s_3 - \bar{s} = (-514,02 - (-5,51)) = -508,51$$

$$- s_4^* = s_4 - \bar{s} = (1448,42 - (-5,51)) = 1453,93$$

- Vérifions que $\sum s_j^* = 0$

$$\sum s_j^* = s_1^* + s_2^* + s_3^* + s_4^*$$

$$= (-592,70 - 358,73 - 508,51 + 1453,93) \\ = 0,01 \approx 0 \quad \text{donc} \quad \sum s_j = 0.$$

→ Il est donc possible de déterminer la série corrigée des variations saisonnières donnée par la formule :

$$\hat{y}_j^* = y_j - s_j \quad (\text{schéma additif})$$

$$\hat{y}_j^* = y_j / s_j \quad (\text{schéma multiplicatif})$$

À la maison, refaites ces opérations dans le cas d'une série aléatoire dont le schéma est multiplicatif.

2 - Cas d'une saisonnalité déterministe.

* Calcul de la tendance : $\hat{y}_t = \hat{a}_t + \hat{b}$ avec

$$\hat{a} = \text{Cov} \frac{(t, y)}{V(t)} = \frac{\sum t y - n \bar{t} \bar{y}}{\sum t^2 - n \bar{t}^2}$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \bar{t}$$

Exple : Désaisonnalisations la série suivante dans le cas d'1^{re} série déterministe de schéma additif.

t	J_t	$J_t = J_t^{(0)}$	$d_t = J_t - J_{t-1}$	J_t
1	1248	1308,79	-60,43	1704,55
2	1392	1370,42	-21,68	1704,55
3	1037	1432,66	-575,44	1602,03
4	3159	1557,29	1665,44	1538,09
5	819	1616,91	-164,42	1553,46
6	1065	1678,54	-555,63	1377,75
7	1118	1740,16	-560,94	1666,3
8	2934	1801,79	1134,04	1613,19
9	1138	1863,41	-663,52	1601,66
10	1456	1925,03	-407,41	1768,45
11	1224	1766,07	1108,06	1529,3
12	3090	1769	704,3	1586,1

Après calcul on aura :

$$a = 61,6$$

$$b = 1247,2$$

$$\hat{J}_t = 61,6t + 1247,2 \leftarrow \text{équation de la droite de régression.}$$

- Calcul de la tendance : $\hat{J}_t = 61,6t + 1247,2$
 $\hat{J}_1 = 61,6(1) + 1247,2 = 1308,79$

* Calcul de la différence au trend

$$d_t = J_t - \hat{J}_t$$

→ Calcul des coefficients saisonniers S_j :

$$S_j = \sum \frac{d_{ij}}{n}$$

$$S_1 = -462,8$$

$$S_2 = -312,44$$

$$S_3 = -545,70$$

$$S_4 = 1321$$

- On vérifie que $\sum S_j = 0$ on a :

$$S_j = (-462,8 - 312,44 - 545,70 + 1321) =$$

* Vérification effective :

→ On peut donc déterminer la série corrigée des variations saisonnières ; on a :

$$Y'_{ij} = J_{ij} - S_j \text{ (schéma additif)}$$

$$Y'_{ij} = J_{ij} / S_j \text{ (schéma multiplicatif)}$$

• Différence entre Y_{ij} et Y^*_{ij}

• Quelles sont les points de convergences et divergences entre J_{ij} et J^*_{ij}

J^*_{ij} est la série corrigée des variations saisonnières.

• Convergences : J_{ij} et J^*_{ij} sont toutes deux

des séries convergentes

T.A.F : Refaire la même chose si le
thème était multiplicatif.

Pour faire
une prévision
en série temporelle il
faut la rendre
stationnaire.

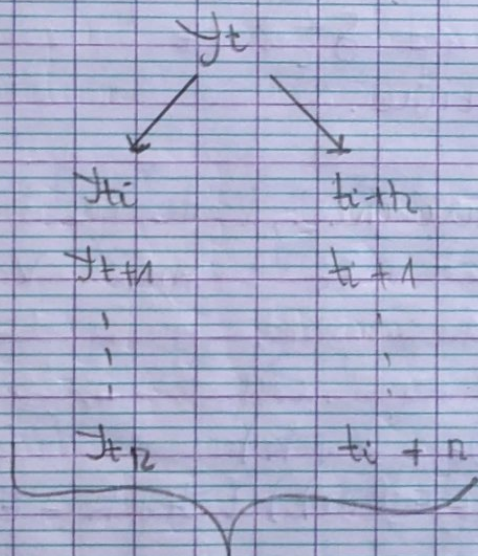
Lundi, 14 Octobre 2024

Chapitre 03 : LES CONCEPTS DE BASE.

Une série déterministe est une valeur de t que l'on peut déterminer.

Une série aléatoire est une série dont on ne connaît pas les réalisations de manière certaine.

Stationnarité stricte (1^{er} ordre) SSR



même loi de probabilité

Exercice d'application.

$$X = \mu + \beta t + \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t \sim \mu(0, \sigma_\varepsilon^2)$

1- Cette série est-elle stationnaire au sens faible ?

* Espérance

y_t est stationnaire si $E(y_t) = \mu_y \forall t$.

$$E(y_t) = E(\mu + \beta t + \varepsilon_t) \\ = E(\mu) + \beta E(t) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = \mu + \beta t \quad \forall t$$

n'est pas stationnaire

* Variance :

$$V(y_t) = E(y_t - E(y_t))^2$$

$$= E((\mu + \beta t + \varepsilon_t - \mu - \beta t))^2$$

$$V(y_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t$$

Est stationnaire.

* Cov-Variance. Elle ne dépend pas du temps mais varie dans le temps. Elle ne dépend que du temps.

l'écrit entre y_t et y_{t+k} .

$$\gamma_k = \text{Cov}(y_t, y_{t+k})$$

$$= E[(y_t - E(y_t))(y_{t+k} - E(y_{t+k}))]$$

$$\text{or } y_{t+k} = \mu + \beta(t+k) + \varepsilon_t + \varepsilon_k$$

$$E(y_{t+k}) = \mu + \beta(t+k)$$

$$\gamma_k = E[(\mu + \beta t + \varepsilon_t - \mu - \beta t)(\mu + \beta(t+k) + \varepsilon_t + \varepsilon_k - \mu - \beta(t+k))]$$

$$\sigma_k = E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \sigma^2 & k = 0 \end{cases}$$

la série n'est pas stationnaire au sens faible.

Exemple 2.

$$Y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{P}(0, \sigma^2, 0)$$

1- Cette série est-elle stationnaire au sens faible.

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_{t-1}) = 0 + 0 = 0$$

III -

$$E(Y_t) = 0 \quad \forall t$$

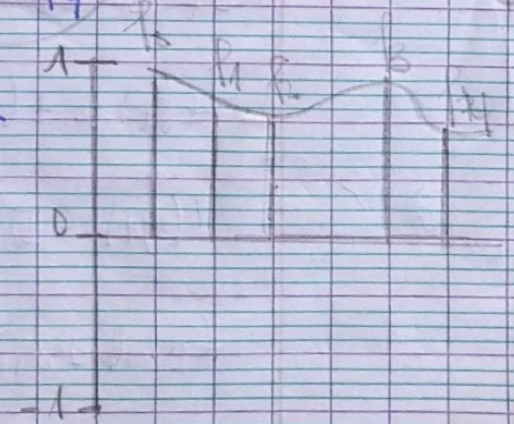
$$\text{Var}(Y_t) = E(Y_t - E(Y_t))^2 = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1})^2$$

$$= E(\varepsilon_t^2 + 2\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-1}^2) = \sigma^2 + 0 + \sigma^2 = 2\sigma^2$$

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t+k})}{\sigma_{Y_t} \sigma_{Y_{t+k}}}$$

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$$

t	ρ_k	ρ_1	ρ_2
0	1	1	
1	0,7	0,01	
2	0,5	0,05	
3	0,3	0,1	
4	0,6	0,2	



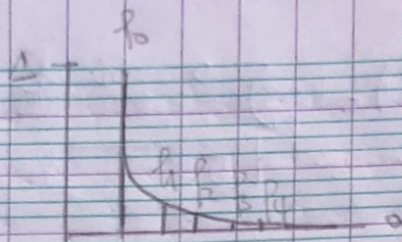
série non stationnaire

si les coef. autocorr. sont tous proches de 1 on dit que la série est non stationnaire.

$$E(Y_t - Y_{t-k})^2 = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-k} - \varepsilon_{t-k-1})^2$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k})$$

si k augmente
et que les Coef
ficients tendent
vers 0, on dit
que la série
est stationnaire.
15-10-2024



stationnaire.

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t \\ \text{Cov}(Y_t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Stationnarisons la TS

Soit la TS : $Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$

Soit la composante déterministe $E(Y_t) = \beta_1 + \beta_2 t$

la série est définie telle que : $Y'_t = Y_t - E(Y_t)$

$$\Rightarrow Y'_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t - \beta_1 - \beta_2 t$$

$$Y'_t = \varepsilon_t$$

Propriétés :

$$\begin{cases} E(Y'_t) = E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall t \\ V(Y'_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t \\ \text{Cov}(Y'_t, Y'_{t+k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{cases}$$

T.A.T. - Soit le processus TS si on suppose

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

Déterminons qu'il est non stationnaire pour un trend déterministe et stationnarise le

→ Propriété de l'opération retard L .

$$(P_1) \quad L^p Y_t = Y_{t-p}$$

$$(P_2) \quad L Y_t = Y_{t-1}$$

$$L^3 Y_t = Y_{t-3}$$

$$(P_3) \quad L^0 Y_t = Y_t$$

$$L^p (L^q) Y_t = L^{p+q} Y_t = Y_{t-p-q}$$

→ Propriété de l'opération différence

$$\Delta^1 Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - L Y_t = (1-L) Y_t$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 Y_t &= (1-L)^2 Y_t = (1-2L+L^2) Y_t \\ &= Y_t - 2L Y_t + L^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 Y_t &= Y_t - Y_{t-1} - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \\ &= (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \end{aligned}$$

$$\Delta^2 Y_t = (1-L)^2 Y_t$$

On distingue le processus de TS avec dérivée et le processus de TS sans dérivée.

* Cas de TS avec dérivée.

Démontrons que ce TS est non stationnaire et comment le stationnariser.

Soit la DS.

$$Y_t = \beta + Y_{t+1} + \varepsilon_t$$

- Montrons que la DS suit une marche aléatoire.

Soit la D.S.

$$Y_t = \beta + Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$t=1 \Rightarrow Y_1 = \beta + Y_0 + \varepsilon_1 \quad (1)$$

$$t=2 \Rightarrow Y_2 = \beta + Y_1 + \varepsilon_2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ dans } (2) \Rightarrow Y_2 = \beta + (\beta + Y_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow Y_2 = 2\beta + Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (3)$$

$$t=3 \Rightarrow Y_3 = \beta + Y_2 + \varepsilon_3 \quad (4)$$

$$(3) \text{ dans } (4) \Rightarrow Y_3 = \beta + (2\beta + Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3$$

$$\Rightarrow Y_3 = 3\beta + Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$t \Rightarrow Y_t = t\beta + Y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \quad \rightarrow \text{La DS suit une marche aléatoire.}$$

$$- E(Y_t) = E\left(t\beta + Y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right)$$

$$= E(t\beta) + E(Y_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^t E(\varepsilon_i)}_0$$

$$E(Y_t) = t\beta + Y_0 \quad \forall t.$$

$$- \text{Var}(Y_t) = E\left[Y_t - E(Y_t)\right]^2 = E\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right)^2$$
$$= E\left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t)^2\right]$$

$$= E[(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_t)(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_t)]$$

$$- \text{Var}(y_t) = E[(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_t^2 + \epsilon_i \epsilon_j \epsilon_i \epsilon_j)]$$

$$\text{Var}(y_t) = E[(\epsilon_1^2) + E(\epsilon_2^2) + \dots + E(\epsilon_t^2) + \epsilon_i \epsilon_j \underbrace{E(\epsilon_i \epsilon_j)}_0]$$

$$\text{Var}(y_t) = \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 + \dots + \sigma_\epsilon^2 = t \sigma_\epsilon^2$$

$$- \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \sigma_k = E[y_t + E(y_t)(y_{t-k} - E(y_{t-k}))]$$

$$\sigma_k = E\left[\left(\sum_{i=1}^t \epsilon_i\right)\left(\sum_{i=1}^{t-k} \epsilon_i\right)\right]$$

$$= E[(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_t)(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{t-k})]$$

$$= E[(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_{t-k}^2 + \epsilon_j \epsilon_j \epsilon_i \epsilon_j)]$$

$$= E(\epsilon_1^2) + E(\epsilon_2^2) + \dots + E(\epsilon_{t-k}^2) + \epsilon_i \epsilon_j \underbrace{E(\epsilon_i \epsilon_j)}_0$$

$$\sigma_k = \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 + \dots + \sigma_\epsilon^2 = (t-k) \sigma_\epsilon^2$$

$$\sigma_k \begin{cases} t \sigma_\epsilon^2 & \text{SSI } k=0 \\ (t-k) \sigma_\epsilon^2 & \text{SSI } k \neq 0 \end{cases}$$

Comment stationnariser le DS?

Pour rendre le DS stationnaire, il faut que extérieure la tendance stochastique en y appliquant le forte aux dif-ferences.

→ Rendons le BS stationnaire.

$$Y_t = \beta + Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta + Y_{t-1} - Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \beta + \varepsilon_t$$

$$E(\Delta Y_t) = \beta \quad \forall t$$

$$V(\Delta Y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t$$

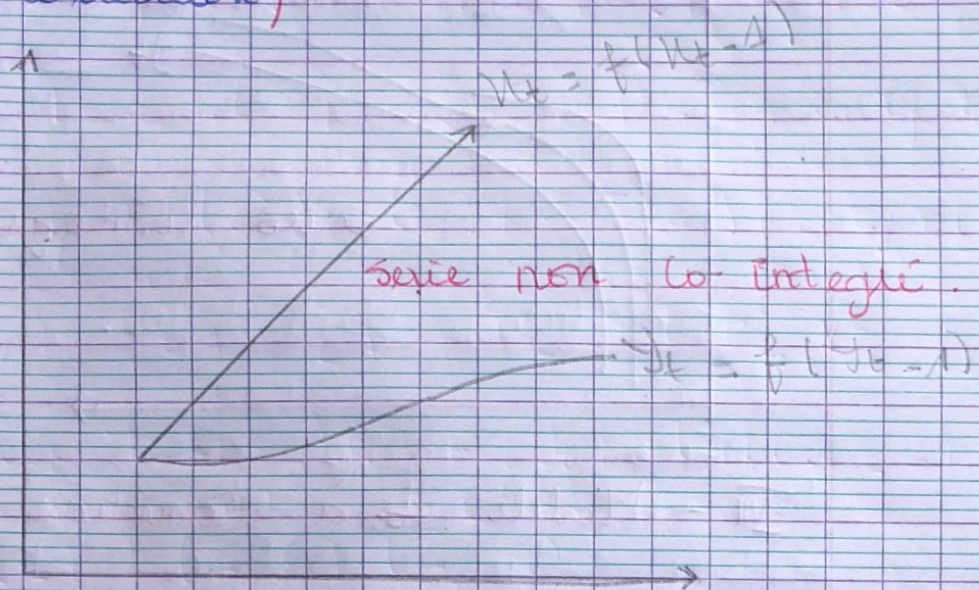
$$Cov(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) = \gamma_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Devrait être le processus BS dans de l'immobilité : $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$
Démontrons qu'il est non stationnaire et stationnarisons le.

Ex : si $Y_t \sim I(1)$ et $Y_t \sim I(1)$ alors $Z_t \sim I(0)$ avec $Z_t = aY_t + bY_t$, $d > d^*$.

Si il est démontré que les séries X_t et Y_t composent des marches aléatoires c-à-d qu'elles peuvent être expliquées par leur valeurs passées. Toute relation entre celles-ci aboutissent à des résultats statistiques significatifs alors que les phénomènes ont des trajectoires différentes. Nous sommes en présence de corrélation fautive (faux

ss (correlation)



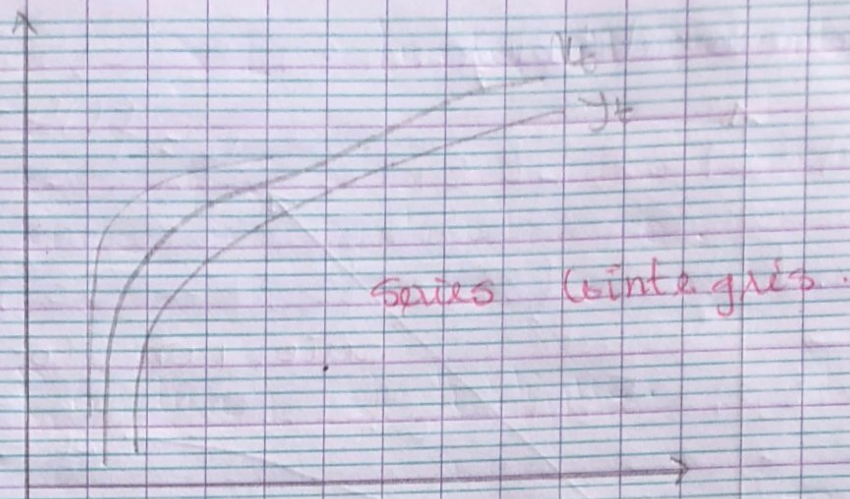
Après d'éviter de telle problème, il faut se rassurer que les deux séries sont co-intégrées.

Deux séries sont dites co-intégrées si :

- Elles ont le même ordre d'intégration. Dans le cadre des séries X_t et Y_t , il y a co-intégration si $X_t \sim I(d)$ et $Y_t \sim I(d)$.

- La combinaison linéaire entre celles-ci aboutit à un nombre d'intégration inférieur.

Dans notre exemple, la combinaison linéaire Z_t avec $Z_t = aX_t + bY_t$. $Z_t \sim (d^*)$ avec $d > d^*$. Le vecteur de co-intégration est alors noté (a, b) .



III - Modèle de à correction d'erreur.

On part d'un modèle à correction d'erreur SSR :

- les modèles sont cointégrés
- la combinaison linéaire des séries à un vecteur unique.

Question d'examen :

On veut estimer la fonction de consommation keynésienne dans le cas de cas de l'économie camerounaise notée $C_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + \epsilon_t$. On suppose que la consommation et le revenu sont $I(1)$.

T.A.T : Que part on dire de ces variables et quelle est la conséquence?

Solution

- $C \sim I(1)$ et $R \sim I(1)$

- Si $Q_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + \epsilon_t$

$\Rightarrow Q_t - \beta_1 - \beta_2 R_t = \epsilon_t$ ou $\epsilon \sim I(0)$.

le vecteur de cointégration $[1, -\beta_1, -\beta_2]$ est unique.

* Ecriture du Modèle à correction d'Erreur (MCE)

Etape 1

soit le modèle : $Q_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + \epsilon_t$

- $\rightarrow$ On l'estime par les MCO $\Rightarrow \hat{Q}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 R_t$
- $\rightarrow$ On extrait le résidu $\Rightarrow \hat{\epsilon}_t = Q_t - \hat{Q}_t$
 $= Q_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 R_t$

Etape 2 :

- $\rightarrow$ Relation dynamique
 $\Delta Q_t = \alpha_1 \Delta R_{t-1} + \gamma \hat{\epsilon}_{t-1}$

- $\rightarrow$ On l'estime par les MCO
 $\Delta \hat{Q}_t = \hat{\alpha}_1 \Delta R_{t+1} + \hat{\gamma} \hat{\epsilon}_{t-1} \quad \hat{\gamma} > 0$

Lundi, 11 Novembre 2019

Quête du chapitre 30

Procédure AD

Ence re appelée Processus ~~TS~~ sont des séries non stationnaire de à l'existence d'une tendance déterministe stochastique. Il s'agit $X_t = \mu + \beta t + \gamma X_{t-1} + a_t$
 $X_t \sim N(0, \sigma_a^2)$

Stationnariser le ~~TS~~ consiste à contrôler la composante stochastique en lui appliquant le filtre de différence

$$\text{Soit } X_t \sim TS \Rightarrow X_t = \mu + \beta t + \gamma X_{t-1} + a_t$$

$$\Rightarrow X_t - X_{t-1} = \mu + \beta + \gamma X_{t-1} - X_{t-1} + a_t$$
$$\Delta X_t = \mu + \beta + (\gamma - 1)X_{t-1} + a_t$$

Il est donc recommandé de faire un test de racine unitaire sur le paramètre de la composante stochastique

le test de racine se fait en 3 étapes

→ Hypothèse

$H_0: \rho = 1 \Rightarrow 0$ ou $\rho = 1$ alors il est ~~non~~ stationnaire du fait que c'est égal à 1.

$H_1: \rho = 1 \neq 0$ ou $\rho \neq 1$ alors il y'a stationnarité

→ Statistiques

$$\text{Dickey-Fuller } (DF_{\text{full}}) = \frac{|\hat{\rho} - 1|}{\frac{1}{n}}$$

→ Décision

Si $DF_c > DF_{\alpha}$ alors l'hypothèse 1 est acceptée et H_0 rejetée.

Si $DF_c < DF_{\alpha}$ alors l'hypothèse H_0 est acceptée et H_1 rejetée.

Sur H_0 , on aboutit à la conclusion que le TS-DS est non stationnaire, Pas contre sur H_1 la série I_0 est stationnaire car nous avons une tendance déterministe.

Si la composante déterministe est maximisée la série I_t est simplement stationnaire.

N.B. Dire qu'une série est non stationnaire c'est parce que elle comporte une tendance stochastique.

$H_0: \rho - 1 = 0$ ou $\rho = 1$ alors il est non stationnaire du fait que c'est égal à 1.

$H_1: \rho - 1 \neq 0$ ou $\rho \neq 1$ alors il y a stationnarité.

→ statistiques

$$\text{Dekey - Fuller (DF, al)} = \frac{|\hat{\rho} - 1|}{\hat{\sigma}_\rho} \quad \text{vs } DF_{\alpha}$$

→ Decision

Si $DF_c > DF_{\alpha}$ alors l'hypothèse 1 est acceptée et H_0 rejetée.

Si $DF_c < DF_{\alpha}$ alors l'hypothèse H_0 est acceptée et H_1 rejetée.

Sur H_0 , on aboutit à la conclusion que le TS-DS est non stationnaire. Par contre, pour H_1 on s'attend à ce que le TS-DS soit stationnaire car nous avons du tendance déterministe.

Si la composante déterministe est maximisée la série I_t est simplement stationnaire.

N.B : Dire qu'une série est non stationnaire c'est encore dire qu'elle comporte une tendance stochastique.

Chapitre 09 : Des Modèles ARIMA et des Tests de Racine Unitaire.

L'objectif de ce chapitre est de faire une prévision sur la série.

Comment faire pour écrire un processus ARIMA?

A quoi sert le théorème de Wold?

Théorème de Wold.

Tout processus stochastique linéaire peut être comme la somme d'une constante et d'une combinaison linéaire.

Représentation mathématique du Théorème de Wold :
$$x_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots +$$

- Appliquons l'espérance

$$E(x_t) = E(\mu) + E(a_t) + \psi_1 E(a_{t-1}) + \psi_2 E(a_{t-2}) + \dots +$$

$$\mu_y = \mu$$

$$E(x_t) = \mu_y = \mu$$

C'est grâce au théorème de Wold qu'on sait comment représenter le processus d'ARIMA.

- Variance.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y_t) &= E [Y_t - E(Y_t)]^2 \\
 &= E [\mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} - \mu]^2 \\
 &= E [(a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots)] (a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots) \\
 &= E [a_t^2 + \psi_1^2 a_{t-1}^2 + \psi_2^2 a_{t-2}^2 + \underbrace{\sum_{i \neq j} \psi_i \psi_j a_{t-i} a_{t-j}}_{=0} + \dots] \\
 &= E [E(a_t^2) + \psi_1^2 E(a_{t-1}^2) + \psi_2^2 E(a_{t-2}^2) + \dots] \\
 \text{Var}(Y_t) &= \sigma_a^2 + \psi_1^2 \sigma_a^2 + \psi_2^2 \sigma_a^2 \\
 \text{Var}(Y_t) &= (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots) \sigma_a^2 \\
 \text{Var}(Y_t) &= (1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2) \sigma_a^2 \\
 \Rightarrow \text{Var}(Y_t) &= (\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 + 1) \sigma_a^2
 \end{aligned}$$

Condition de stationnarité et d'inversibilité du processus AR

Soit le processus AR suivant.

$$Y_t = \mu + \psi_1 Y_{t-1} + \psi_2 Y_{t-2} + \dots + \psi_p Y_{t-p} + a_t$$

Un processus AR est stationnaire, si les racines associées à son polynôme retard sont hors du cercle d'unité,

$c = a - d > 1$ ou < -1 (on dit que L est racine du polynôme)

En introduisant l'opérateur retard L

$$Y_t = \mu + \varphi_1 L Y_t + \varphi_2 L^2 Y_t + \dots + \varphi_p L^p Y_t + a_t$$

$$Y_t - \varphi_1 L Y_t - \varphi_2 L^2 Y_t - \dots - \varphi_p L^p Y_t = \mu + a_t$$

$$\underbrace{(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p)}_{f_p(L)} Y_t = \mu + a_t$$

$$f_p(L) Y_t = \mu + a_t$$

le AR est alors stationnaire si les racines associées à son polynôme caractéristique noté $f_p(L)$ sont hors du cercle d'unité.

Méthode 1

Dans le cas d'un AR le processus Y_t est stationnaire si les opérations suivantes sont effectuées.

$$\text{Soit le AR(1)} : Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + a_t$$

$$\text{En se introduisant } L \quad Y_t = \mu + \varphi_1 L Y_t + a_t$$

$$\Rightarrow (Y_t - \varphi_1 L Y_t) = \mu + a_t \Rightarrow (1 - \varphi_1 L) Y_t = \mu + a_t$$

En résolvant l'équation $1 - \varphi_1 L = 0$
 $\Rightarrow 1 = \varphi_1 L \Rightarrow L = 1/\varphi_1$

X_t est stationnaire ssi $|L| = |1/\varphi_1| > 1$

Puis que la condition de stationnarité est respectée, le processus AR(1) stationnaire est automatiquement inversible, c-à-d. AR(1) peut s'écrire comme un MA infini (MA est une combinaison linéaire de valeur inf-rie d'un bruit blanc). C-à-d. le AR(1) s'écrit comme un MA(∞).

On peut donc inverser un AR de deux (2) manières.

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + a_t \quad (1)$$

$$\Rightarrow Y_{t-1} = \mu + \varphi_1 Y_{t-2} + a_{t-1} \quad (2)$$

$$(1) \text{ dans } (2) \Rightarrow Y_t = \mu + \varphi_1 (\mu + \varphi_1 Y_{t-2} + a_{t-1}) + a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 Y_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t \quad (3)$$

$$\Rightarrow Y_{t-2} = \mu + \varphi_1 Y_{t-3} + a_{t-2} \quad (4)$$

$$(4) \text{ dans } (3)$$

$$Y_t = \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 (\mu + \varphi_1 Y_{t-3} + a_{t-2}) + \varphi_1 a_{t-1} + a_t$$

$$y_t = \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 \mu + \varphi_1^3 y_{t-3} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t$$

...

$$P \Rightarrow y_t = \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 \mu + \dots + \varphi_1^P \mu + \varphi_1^{P+1} y_{t-(P+1)} +$$

$$\varphi_1^P a_{t-P} + \mu + \varphi_1^2 a_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t$$

$$y_t = \sum_{i=0}^P \varphi_1^i \mu + \varphi_1^{P+1} y_{t-(P+1)} + \sum_{i=0}^P \varphi_1^i a_{t-i}$$

On calcule $\lim_{P \rightarrow \infty} \varphi_1^{P+1} y_{t-(P+1)} = 0$

$$\Rightarrow y_t = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i a_{t-i}$$

$$\Rightarrow y_t = \mu \left(\frac{1}{1-\varphi_1} \right) + a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \dots +$$

AR(1) $\rightarrow$ MA(∞)

N.B.: $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i = \frac{1}{1-\varphi_1}$

Méthode 2 :

$$y_t = \mu + \varphi_1 y_{t-1} + a_t$$

on introduit L

$$\Rightarrow y_t = \mu + \varphi_1 L y_t + a_t$$

$$\Rightarrow (1 - \varphi_1 L) y_t = \mu + a_t$$

$$Y = \cancel{\mu} \times \frac{1}{1 - \varphi_1 L} + \frac{1}{1 - \varphi_1 L} a_t$$

$$\Rightarrow Y = \cancel{\mu} \times \frac{1}{1 - \varphi_1} \mu + \frac{1}{1 - \varphi_1 L} a_t$$

division euclidienne

$$\frac{1}{-(1 - \varphi_1 L)} \overline{\frac{1 - \varphi_1 L}{1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots}}$$

$$\frac{\varphi_1 L}{-(\varphi_1 - \varphi_1^2 L^2)}$$

$$\frac{\varphi_1^2 L^2}{(\varphi_1^2 - \varphi_1^3 L^3)}$$

$$\frac{1}{1 - \varphi_1 L} = 1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots +$$

Pour remarquer $\frac{1}{1 - \varphi_1} = 1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \dots +$

$$Y = \mu(1 + \mu + \mu^2 + \dots +) + (1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots) a_t$$

$$Y = \mu \left(\frac{1}{1 - \varphi_1} \right) + a_t + \varphi_1 L a_t + \varphi_1^2 L^2 a_t + \dots +$$

$$Y = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i + a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \dots +$$

AR(1) $\rightarrow$ MA(∞).

Exercice

Sont les processus suivants :

$$1) Y_t = 7 + 0,1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$2) Y_t = 10 + 0,2 Y_{t-1} + 0,7 Y_{t-2} + \epsilon_t$$

$$3) Y_t = 20 + 2,1 Y_{t-1} + 1,2 Y_{t-2} + 0,4 Y_{t-3} + \epsilon_t$$

T.A.F.

- 1- Ces processus sont-ils stationnaires?
- 2- Quelle en est la conséquence? Dans le cas du 1^{er} exemple? appeler de deux manières cette conséquence

Réponse

$$1- Y_t = 7 + 0,1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Introduisons L :

$$Y_t = 7 + 0,1 L Y_t + \epsilon_t$$

$$Y_t - 0,1 L Y_t = 7 + \epsilon_t$$

$$(1 - 0,1 L) Y_t = 7 + \epsilon_t$$

Cherchons la racine

$$(1 - 0,1 L) = 0 \Rightarrow 1 = 0,1 L$$

$$L = \frac{1}{0,1} = 10 > 1$$

le processus AR(1) est stationnaire donc il est donc inversible. autrement en $c = a = d$ qu'il peut s'écrire comme MA(1)

* Equivons le AR(1) comme MA(1)

$$Y_t = 7 + 0,1 Y_{t-1} + a_t \quad (1)$$

$$Y_{t-1} = 7 + 0,1 Y_{t-2} + a_{t-1} \quad (2)$$

$$(1) \text{ dans } (2) \Rightarrow Y_t = 7 + 0,1(7 + 0,1 Y_{t-2} + a_{t-1}) + a_t$$

$$Y_t = 7 + 0,1 \times 7 + 0,1^2 Y_{t-2} + 0,1 a_{t-1} + a_t \quad (3)$$

$$Y_{t-2} = 7 + 0,1 Y_{t-3} + a_{t-2} \quad (4)$$

$$(4) \text{ dans } (3) \Rightarrow Y_t = 7 + 0,1 \times 7 + 0,1^2 (7 + 0,1 Y_{t-3} + a_{t-2}) + 0,1 a_{t-1} + a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = 7 + 0,1 \times 7 + 0,1^2 \times 7 + 0,1^3 Y_{t-3} + 0,1^2 a_{t-2} + 0,1 a_{t-1} + a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = 7 + 0,1 \times 7 + 0,1^2 \times 7 + \dots + 0,1^p \times 7 + 0,1^{p+1} Y_{t-(p+1)} + 0,1^p a_{t-p} + \dots + 0,1^2 a_{t-2} + 0,1 a_{t-1} + a_t$$

$$Y_t = \sum_{i=0}^p 7 \times 0,1^i + 0,1^{p+1} Y_{t-(p+1)} + \sum_{i=0}^p 0,1^i a_{t-i}$$

$$\text{donc } 0,1^{p+1} Y_{t-(p+1)} = 0$$

$$\Rightarrow Y_t = 7 \sum_{i=0}^{\infty} 0,1^i + \sum_{i=0}^{\infty} 0,1^i a_{t-i}$$

2^{ème} méthode

En introduisant L :

$$x_t = f + 0,1 L x_t + a_t$$

$$\Rightarrow x_t - 0,1 L x_t = f + a_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0,1 L) x_t = f + a_t$$

$$\Rightarrow x_t = \frac{f}{1 - 0,1} + \frac{a_t}{1 - 0,1 L}$$

Développement géométrique

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - 0,1 L \\ \hline - (1 - 0,1 L) & 1 + 0,1 L + 0,1^2 L^2 + \dots \\ \hline 0,1 L & \\ - (0,1 L - 0,1^2 L^2) & \\ \hline 0,1^2 L^2 & \\ - (0,1^2 L^2 - 0,1^3 L^3) & \\ \hline 0,1^3 L^3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x_t = f(1 + 0,1 + 0,1^2 + \dots + 1) + a_t(1 + 0,1 L + 0,1^2 L^2 + \dots + 1)$$

$$\Rightarrow x_t = f(1 + 0,1 + 0,1^2 + \dots + 1) + a_t + 0,1 L a_t + 0,1^2 L^2 a_t + \dots$$

$$= f(1 + 0,1 + 0,1^2 + \dots + 1) + a_t + 0,1 a_{t-1} + 0,1^2 a_{t-2} + \dots$$

$$= 7 \sum_{i=0}^{\infty} 0,1^i + u_t + 0,1 u_{t-1} + 0,1^2 u_{t-2}$$

18-M-2024

C. les processus stochastique stationnaire en MM.

les processus stochastique en MM d'ordre Q encore appelé processus MAQ s'écrit comme la somme d'une constante et d'une combinaison linéaire de la valeur présente X passé d'un bruit blanc d'ordre Q .

$$Y_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_Q u_{t-Q} \quad \text{MA}(Q)$$

les MA (Q) sont stationnaire parce qu'ils suivent une combinaison linéaire de bruit blanc.

Note. Bien.

les processus MAQ sont par définition stationnaire.

si le MA est stationnaire il convient de discuter de sa condition d'inversibilité.

Un processus MA(Q) est inversible si il

il y a donc les racines associées à son polynôme caractéristique $\Phi_q(L)$ sont en valeurs absolues > 1 .

$$\Phi_q(L) = (1 - \sigma_1 L - \sigma_2 L^2 - \dots - \sigma_q L^q).$$

on obtient ce en introduisant L dans $\mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{H} &= \mu + a_t - \sigma_1 L a_t - \sigma_2 L^2 a_t - \dots - \sigma_q L^q a_t \\ &= \mu + \underbrace{(1 - \sigma_1 L - \sigma_2 L^2 - \dots - \sigma_q L^q)}_{\Phi_q(L)} a_t. \end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = \mu + \Phi_q(L) a_t$$

Dans le cas d'un MA(1), il y a instabilité si la racine associée à son polynôme est en valeur absolue > 1 .

Soit le MA(1) ci-dessous.

$$\mathcal{H} = \mu + a_t - \sigma_1 a_{t-1}$$

Introduction l'opérateur retard (L)

$$\mathcal{H} = \mu + a_t - \sigma_1 L a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = \mu + (1 - \sigma_1 L) a_t$$

$$\Rightarrow (1 - \sigma_1 L) = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{\sigma_1}$$

Pour que le MA(1) soit inversible il faut que

$$|L| = \left| \frac{1}{\sigma_1} \right| > 1$$

alors le MA(1) peut donc s'écrire par AR(x)

Inversons donc le MA(1) de la manière

* 1^{ère} méthode.

$$Y_t = \mu + a_t - \sigma_1 a_{t-1} \quad (1)$$

on multiplie par le nombre de retard.

$$\begin{aligned} \sigma_1 Y_{t-1} &= -\sigma_1 \mu + \sigma_1 a_{t-1} - \sigma_1^2 a_{t-2} \\ \sigma_1^2 Y_{t-2} &= \sigma_1^2 \mu + \sigma_1^2 a_{t-2} - \sigma_1^3 a_{t-3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\sigma_1^p Y_{t-p} = \sigma_1^p \mu + \sigma_1^p a_{t-p} - \sigma_1^{p+1} a_{t-(p+1)}$$

On additionne les termes semblables.

$$y_t + \sigma_1 y_{t-1} + \sigma_1^2 y_{t-2} + \dots + \sigma_1^p y_{t-p} = \mu + \sigma_1 \mu + \sigma_1^2 \mu + \dots + \sigma_1^p \mu + a_t - \sigma_1^{p+1} a_t - (p+1)$$

$$y_t = -\sigma_1 y_{t-1} - \sigma_1^2 y_{t-2} - \dots - \sigma_1^p y_{t-p} + \mu + \sigma_1 \mu + \sigma_1^2 \mu + \dots + \sigma_1^p \mu + a_t - \sigma_1^{p+1} a_t - (p+1)$$

Calculons $\lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_1^{p+1} a_t (p+1) = 0$

$$y_t = -\sigma_1 y_{t-1} - \sigma_1^2 y_{t-2} - \dots - \mu + \sigma_1 \mu + \sigma_1^2 \mu + \dots + a_t$$

$$y_t = -\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_1^i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_1^i \mu + a_t$$

* 2^{ème} Méthode : Division par la série géométrique.

$$y_t = \mu + a_t - \sigma_1 a_{t-1}$$

$$y_t = \mu + a_t - \sigma_1 a_{t-1}$$

$$y_t = \mu + (1 - \sigma_1) a_t$$

$$\frac{1}{1 - \sigma_1} y_t = \frac{1}{1 - \sigma_1} \mu + a_t$$

$$\frac{1}{1 - \sigma_1} y_t = \mu + \frac{1}{1 - \sigma_1} a_t$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 - \sigma_1 L \\
 \hline
 - (1 - \sigma_1 L) & 1 + \sigma_1 L + \sigma_1^2 L^2 + \dots + \\
 \hline
 \sigma_1 L & \\
 - (\sigma_1 L - \sigma_1^2 L^2) & \\
 \hline
 \sigma_1^2 L^2 & \\
 - (\sigma_1^2 L^2 - \sigma_1^3 L^3) & \\
 \hline
 \sigma_1^3 L^3 &
 \end{array}$$

$$\frac{1}{1 + \sigma_1 L} = 1 + \sigma_1 L + \sigma_1^2 L^2 + \dots + \text{et } \frac{1}{1 - \sigma_1} = 1 - \sigma_1 + \sigma_1^2 - \dots +$$

$$\Rightarrow Y_t (1 - \sigma_1 L + \sigma_1^2 L^2 + \dots) = \mu (1 - \sigma_1 + \sigma_1^2 L^2 + \dots) + a_t$$

$$Y_t + \sigma_1 L Y_t + \sigma_1^2 L^2 Y_t + \dots = \mu + \sigma_1 \mu + \sigma_1^2 \mu + \dots + a_t$$

$$Y_t + \sigma_1 Y_{t-1} + \sigma_1^2 Y_{t-2} + \dots = \mu + \sigma_1 \mu + \sigma_1^2 \mu + \dots + a_t$$

$$Y_t = -\sigma_1 Y_{t-1} - \sigma_1^2 Y_{t-2} - \dots - \mu + \sigma_1 \mu + \sigma_1^2 \mu + \dots + a_t$$

$$Y_t = - \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_1^i Y_{t-i} + \mu \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_1^i + a_t$$

Alors MA(1) $\longrightarrow$ AR(∞)

Exemple

On donne les processus MA suivants

$$1 - Y_t = 5 + a_t - 0,5 a_{t-1} \quad \text{MA}(1)$$

$$Y_t = 3 + a_t + 0,1 a_{t-1} - 0,2 a_{t-2}$$

T.A.F

Que peut-on dire de ces processus dans le cas du 1^{er} exple écrire le processus $MA(1)$ comme un $AR(\infty)$

solution

$$1) Y_t = 5 + a_t - 0,7 a_{t-1}$$

1^{re} méthode

$$Y_t = 5 + a_t - 0,7 a_{t-1}$$

$$Y_t = 5 + a_t - 0,7 L a_t$$

$$\Rightarrow Y_t = 5 + (1 - 0,7 L) a_t$$

cherchons les racines du polynôme caract.

On résout l'équation :

$$1 - 0,7 L = 0 \Rightarrow L = 0,7 L$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{0,7} = 1,42 > 1$$

D'où le $MA(1)$ est stationnaire par définition et inversible $AR(\infty)$.

2^{ème} méthode : Écrivons MA(1) Comme un AR(∞)

$$y_t = 5 + 4 - 0,7 y_{t-1}$$

$$y_t = 5 + 4 - 0,7 y_{t-1}$$

$$0,7 y_{t-1} = 0,7 \times 5 + 0,7 y_{t-1} - 0,7^2 y_{t-2}$$

$$0,7^2 y_{t-2} = 0,7^2 \times 5 + 0,7^2 y_{t-2} - 0,7^3 y_{t-3}$$

$$0,7^p y_{t-p} = 0,7^p \times 5 + 0,7^p y_{t-p} - 0,7^{(p+1)} y_{t-p-1}$$

$$\Rightarrow y_t + 0,7 y_{t-1} + 0,7^2 y_{t-2} + \dots + 0,7^p y_{t-p} = 5 + 0,7$$

$$\times 5 + 0,7^2 \times 5 + \dots + 0,7^p \times 5 + 4 - 0,7 y_{t-(p+1)}$$

$$y_t = -0,7 y_{t-1} + 0,7^2 y_{t-2} - \dots - 0,7^p y_{t-p} + 5 +$$

$$0,7 \times 5 + 0,7^2 \times 5 + \dots + 0,7^p \times 5 + 4 - 0,7^{p+1}$$

$$y_{t-(p+1)}$$

$$\text{or } \lim_{p \rightarrow \infty} 0,7^{p+1} y_{t-(p+1)} = 0$$

$$\Rightarrow y_t = -0,7 y_{t-1} - 0,7^2 y_{t-2} - \dots - 0,7^p y_{t-p} - 5$$

$$+ 0,7 \times 5 + 0,7^2 \times 5 + \dots + 0,7^p \times 5 + 4$$

$$y_t = -\sum_{i=1}^{\infty} 0,7^i y_{t-i} + 5(1 + 0,7 + 0,7^2 + \dots + 0,7^p) + 4$$

l'intégrale donc
le libre de
fois qu'on
différencie
une série
pour la ren-
dre station-
naire.

$$Y_t = - \sum_{i=1}^{\infty} 0.7^i Y_{t-i} + 5 \sum_{i=0}^{\infty} 0.7^i \tilde{a}_t + \epsilon_t$$

II - 2. Typologie des processus stochastiques stationnaires.

III - RACINE UNITAIRE.

2 -

Exple : soit le AR(p)

$$Y_t = \mu + \beta t + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p}$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu + \beta t + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} - Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p - 1) Y_{t-1}$$

$$- (\varphi_2 + \dots + \varphi_p) (Y_{t-2+1} - Y_{t-2}) - (\varphi_3 + \dots + \varphi_p)$$

$$(Y_{t-3+1} - Y_{t-3}) + \dots + (\varphi_{p-1} + \varphi_p) (Y_{t-(p+1)} - Y_{t-(p+1)})$$

$$- (\varphi_p) (Y_{t-p+1} - Y_{t-p}) + \epsilon_t$$

$$\Rightarrow \Delta Y_t = \mu + \beta t + (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \varphi_{p-1}) Y_{t-1}$$

$$\begin{aligned}
 & -(\varphi_2 + \dots + \varphi_p)(y_{t-1} - y_{t-2}) - (\varphi_3 + \dots + \varphi_p)(y_{t-2} - y_{t-3}) \\
 & - \dots - (\varphi_{p-1} + \varphi_p)(y_{t-p+2} - y_{t-p+1}) - \varphi_p(y_{t-p+1} - y_{t-p}) + a_t.
 \end{aligned}$$

Posons

$$\underbrace{(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p)}_p = p - 1$$

$$-(\varphi_2 + \dots + \varphi_p) = \lambda_1$$

$$-(\varphi_3 + \dots + \varphi_p) = \lambda_2$$

$$-(\varphi_{p-1} + \varphi_p) = \lambda_{p-2}$$

$$-(\varphi_p) = \lambda_{p-1}$$

$$\Delta y_t = \mu + \beta_t + (1 - \alpha) y_{t-1} + \lambda_1 \Delta y_{t-1} + \lambda_2 \Delta$$

$$\begin{aligned}
 & y_{t-2} + \dots + \lambda_{p-2} \Delta y_{t-p+2} + \lambda_{p-1} \Delta y_{t-p} \\
 & + a_t
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 H_0 & R - 1 = 0 & \neq H_1 \quad p - 1 \neq 0 \\
 N - S & & \uparrow \\
 PRU & I(0) & ARU.
 \end{array}$$

À partir de cette écriture il est possible de faire le test de racine unitaire.

Si H_1 est accepté, on conclut qu'il y a absence d'une racine unitaire ou stationnarité.

Puis que le test est effectué sur le paramètre de la 1^{ère} variable endogène retardée ($\varphi - 1$) on dit que H_0 est H_0 .

Noté: Sous H_1 on s'arrête.

Si le test conclut à retenir H_0 , alors $\varphi - 1 = 0$. Notre équation (1) devient H_0 .

$$\Delta y_t = \mu + \beta_t + \lambda_1 \Delta y_{t-1} + \lambda_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \lambda_p \Delta y_{t-p} + a_t$$

Question 51

Soit un processus AR(p).
Donner les transformations qui aboutiraient à ce que la série y soit $I(2)$

g-M-2022

Donc $H_0: p-1 = 0$

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \lambda_1 \Delta y_{t-1} + \lambda_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \lambda_{p-2} \Delta y_{t-p+2} + \lambda_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + a_t.$$

Faire la différence.

$$\Delta y_t - \Delta y_{t-1} = \mu + \beta t + \lambda_1 \Delta y_{t-1} + \lambda_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \lambda_{p-2} \Delta y_{t-p+2} + \lambda_{p-1} \Delta y_{t-p+1} - \Delta y_{t-1} + a_t.$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_t &= \mu + \beta t + (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p-2} + \lambda_{p-1}) \Delta y_{t-1} \\ &\quad - (\lambda_2 + \dots + \lambda_{p-2} + \lambda_{p-1}) (\Delta y_{t-2+1} - \Delta y_{t-2}) \\ &\quad - (\lambda_3 + \dots + \lambda_{p-2} + \lambda_{p-1}) (\Delta y_{t-3+1} - \Delta y_{t-3}) + \dots \\ &\quad - (\lambda_{p-2} + \lambda_{p-1}) (\Delta y_{t-(p-2)+1} - \Delta y_{t-(p-2)}) - \\ &\quad \lambda_{p-1} (\Delta y_{t-(p-1)+1} - \Delta y_{t-(p-1)}) + a_t. \end{aligned}$$

Posons $\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p-2} + \lambda_{p-1}$

$$= (\delta - 1)$$

$$\delta_1 = -(\lambda_2 + 11 + \lambda_{p-2} + \lambda_{p-1})$$

$$\delta_2 = (\lambda_3 + 11 + \lambda_{p-2} + \lambda_{p-1})$$

⋮

$$\delta_{p-3} = -(\delta_{p-2} + \lambda_{p-1})$$

$$\delta_{p-2} = -(\lambda_{p-1})$$

$$\Delta^2 y_t = \mu + \beta t + (\delta - 1) \Delta^2 y_{t-1} + \gamma_1 \Delta^2 y_{t-1} + \gamma_2 \Delta^2 y_{t-2} + 11 + \gamma_{p-3} \Delta^2 y_{t-p+3} + \gamma_{p-2} \Delta^2 y_{t-p+2} + at$$

$$\star \text{ test : } H_0 : \delta - 1 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \delta - 1 \neq 0$$

Si H_1 est acceptée on aboutit à la conclusion que la série est I(1).

Toute fois sur H_0 , la série y_t est non stationnaire, il faut donc procéder à une autre transformation et faire de nouveau le test de racine unitaire.

$$\text{Sur } H_0 : \delta - 1 = 0$$

$$\Delta^2 y_t = \mu + \beta t + \gamma_1 \Delta^2 y_{t-1} + \gamma_2 \Delta^2 y_{t-2} + 11$$

$$\delta_{p-3} \Delta^2 y_{t-p+3} + \delta_{p-2} \Delta^2 y_{t-p+2} + \dots$$

les types de modèles selon le test de Dickey Fuller simple.

- Modèle sans dérive et sans tendance déterministe.

On a :

$$\Delta y_t = (\varphi_1 - 1) y_{t-1} + \mu_t \quad \text{qui est le}$$

modèle après transformation, car pour le transformer on utilise le filtre au différence.

Alors le modèle de départ est :

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \mu_t$$

On multiplie à gauche et à droite par $y_t - y_{t-1}$:

$$\Delta y_t = (\varphi_1 - 1) y_{t-1} + \mu_t$$

Exercice 1.

Soit le processus AR(1) ci-dessous

$$\hat{y}_t = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.03 \end{pmatrix} y_{t-1} + \mu_t \quad \text{où } \mu_t \text{ des valeurs}$$

entre parenthèse sont des écarts types.

la valeur de Dickey-Fuller $DF_{lu} = 2,16$

1 - Peut-on effectuer un test de racine unitaire ? si non pour quoi ?

2 - Effectuer le test.

Exercice 2

On donne le processus AR(2) ci-dessous

$$\hat{Y}_t = \underset{(0,2)}{3} + \underset{(0,01)}{0,7} Y_{t-1} + \underset{(0,04)}{0,4} Y_{t-2} + a_t$$

$$DF_{lu} = 2,48$$

N.B : les valeurs entre parenthèse correspondent aux écarts types des paramètres du modèle.

On suppose que la cov- variance est nulle.

1 - Répondre comme dans l'exercice 1.

Solution 1.

1 - On ne peut pas effectuer car le processus n'est pas transformé

2 - Transformons le.

x Filtrer du difference.

$$y_t = y_{t-1} = 4 + 0,3 y_{t-1} - y_{t-1} + a_t$$

$$\Delta y_t = 4 + (0,3 - 1) y_{t-1} + a_t$$

$$\Delta y_t = 4 + (-0,7) y_{t-1} + a_t$$

$$H_0: \rho_1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad H_1: \rho_1 - 1 \neq 0.$$

$$\text{Stat DF calculée} = \frac{|\hat{\rho}_1 - 1|}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_1 - 1}} \sim \text{DF Lu.}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_1 - 1} = \sqrt{\text{Var}(\hat{\rho}_1 - 1)} = \sqrt{\text{Var}(\hat{\rho}_1)} = \hat{\sigma}_{\hat{\rho}_1} = 0,02$$

$$\text{DFc} = \frac{|-0,7|}{0,02} = 35 > 2,16$$

Alors H_1 est acceptée et H_0 rejetée.

Solution 2.

$$y_t = \mu + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + a_t.$$

$$y_t - y_{t-1} = \mu + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + a_t$$

Quand la
Valeur est >
à DFc alors
on accepte
 H_1 et on
rejette H_0
Inversem.

$$\Rightarrow \Delta y_t = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2 - 1)y_{t-1} - (\varphi_2)(y_{t-1} - y_{t-2}) + a_t$$

$$\Delta y_t = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2 - 1)y_{t-1} + \lambda_1 \Delta y_{t-1} + a_t$$

$$(\varphi_1 + \varphi_2 - 1) = 0 - 1$$

$$\lambda_1 = -(\varphi_2)$$

$$\Delta y_t = 3 + (0,7 + 0,4 - 1)y_{t-1} - 0,4 \Delta y_{t-1} + a_t$$

$$\begin{aligned} \times H_0: & (\varphi_1 + \varphi_2 - 1) = (0 - 1) = 0 \\ & + \\ & \lambda_1 (0 - 1) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\times DFE = \frac{|\varphi_1 + \varphi_2 - 1|}{\hat{\sigma}_{\varphi_1 + \varphi_2 - 1}}$$

$$\text{or } \hat{\sigma}_{(\varphi_1 + \varphi_2 - 1)} = \sqrt{\text{Var}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$= \sqrt{V(\varphi_1) + V(\varphi_2) + 2 \underbrace{\text{Cov}(\varphi_1, \varphi_2)}_0}$$

$$\text{Var } \varphi_1 = (0,01)^2 \quad ; \quad \text{Var } \varphi_2 = (0,04)^2$$

$$\sqrt{\text{Var}(0,01)^2 + \text{Var}(0,04)^2} =$$