

# Des Modèles ARIMA et des Tests de Racine Unitaire

## I - Introduction

## II - Des Modèles ARIMA

Remise de  
Wold et filtres  
linéaire

### II-1 Typologie des processus stochastiques stationnaires

Le théorème de Wold prouve mathématiquement qu'un processus stochastique stationnaire peut toujours être généré par la somme d'une constante et d'une combinaison linéaire, parfois infinie, des composantes courantes et passées d'un bruit blanc. Cela se traduit en termes mathématiques de la façon suivante :

(46)  
 $\{Y_t\}$  stationnaire  $\Rightarrow \exists$  un bruit blanc  $\{a_t\}$  d'ordre  $p$ , et nls  
 coefficients  $\mu_y, \psi_1, \psi_2, \dots$  tels que :

$$\forall t : Y_t = \mu_y + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots$$

cette équation est la représentation de Wold du processus stochastique stationnaire  $\{Y_t\}$ . Ici, l'espérance mathématique de  $Y_t$  est représentée par  $\mu_y$  et la variance de  $Y_t$  par :

$$\sigma_a^2 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 + 1 \right)$$

On distingue un processus stochastique stationnaire d'un autre par :

- la spécificité des paramètres qui déterminent la fonction de densité du bruit blanc  $\{a_t\}$  qui le génère ;
- la spécificité des coefficients  $\mu_y, \psi_1, \psi_2, \dots$  ;

Sur cette base on met en évidence trois types de processus stochastiques stationnaires :

- les processus autorégressifs  $AR(p)$  ou  $ARMA(p, 0)$  ;
- les processus en moyenne mobile  $MA(q)$  ou  $ARMA(0, q)$  ;
- les processus mixtes (autorégressifs et en moyenne mobile  $ARMA(p, q)$ )

b) Processus stochastiques autorégressifs stationnaires

Les processus autorégressifs peuvent s'écrire comme la somme d'une constante, de la valeur courante d'un bruit blanc et d'une combinaison linéaire finie de leurs valeurs passées.



(57)  
 un processus stochastique  $\{Y_t\}$  est dit autorégressif d'ordre  $p$ , et noté  $AR(p)$  ou  $ARMA(p, 0)$  si :

$$\forall t, Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

où le processus stochastique  $\{a_t\}$  est un bruit blanc.

Exemples :

- Processus  $AR(1)$  ou  $ARMA(1, 0)$  :

$$\forall t : Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + a_t$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc

- Processus  $AR(2)$  ou  $ARMA(2, 0)$  :

$$\forall t : Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + a_t$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc

Si l'on utilise l'opérateur de retard  $L$  dans l'équation générique de l' $AR(p)$  ci-dessus, on obtient

$$\forall t : Y_t = \mu + \phi_1 L Y_t + \phi_2 L^2 Y_t + \dots + \phi_p L^p Y_t + a_t$$

c'est-à-dire :

$$\forall t : Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \dots - \phi_p L^p Y_t = \mu + a_t$$

ou :

$$\forall t : (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = \mu + a_t$$

le polynôme de degré  $p$  en l'opérateur de retard  $L$

dit alors  
cela s'illustre

○  $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)$  est caractéristique du AR(p).

Pour qu'un processus stochastique autorégressif soit stationnaire, les racines du polynôme caractéristique  $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)$  doivent être en dehors du cercle unité. Quand ces racines sont réelles, elles doivent être strictement inférieures à -1 ou strictement supérieures à 1.

Exemple :

○ Soit un processus AR(1) ou ARMA(1,0),  $\{y_t\}$ , défini par la relation :

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + a_t$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc.  $\{y_t\}$  se représente aussi de la manière suivante avec l'opérateur de retard :

$$(1 - \phi_1 L) y_t = \mu + a_t$$

○ Son polynôme caractéristique est alors  $(1 - \phi_1 L)$  dont la racine est  $1/\phi_1$ . Le processus stochastique est donc stationnaire si  $1/\phi_1 < -1$  ou si  $1/\phi_1 > 1$ , et donc si  $-1 < \phi_1 < 1$ .

Un processus stochastique autorégressif d'ordre p a par définition une représentation autorégressive finie (il dépend de ses valeurs passées jusqu'à un retard fini p) :

$$\forall t : y_t = \mu + \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \dots + \phi_p L^p y_t + a_t$$

○ On montre que si ce processus est stationnaire, il a également une représentation en forme de moyenne mobile infinie des valeurs courantes et passées du bruit blanc  $\{a_t\}$ .



On dit alors qu'un processus AR stationnaire est inversible.  
Cela s'illustre par l'exemple simple d'un processus AR(1).

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + a_t \\
 &= \mu + \varphi_1 (\mu + \varphi_1 Y_{t-2} + a_{t-1}) + a_t \\
 &= \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 Y_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t \\
 &= \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 (\mu + \varphi_1 Y_{t-3} + a_{t-2}) + \varphi_1 a_{t-1} + a_t \\
 &= \mu + \varphi_1 \mu + \varphi_1^2 \mu + \varphi_1^3 Y_{t-3} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t \\
 &\dots = (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2) \mu + \varphi_1^3 Y_{t-3} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t \\
 &= \dots \\
 &= \mu \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i + \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_1^n Y_{t-n} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i a_{t-i} \dots \\
 &= \mu \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i a_{t-i} \quad \text{si } -1 < \varphi_1 < 1 \\
 &= \frac{\mu}{1 - \varphi_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i a_{t-i} \quad \text{si } -1 < \varphi_1 < 1
 \end{aligned}$$

Il s'agit de la forme particulière que prend la représentation de l'old d'un processus stochastique AR(1) stationnaire :

$$\forall t : Y_t = \mu_Y + a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \dots$$

$$\text{ou } \mu_Y = \frac{\mu}{1 - \varphi_1} \text{ et } \varphi_i = \varphi_1^i, \forall i.$$

On peut obtenir ce résultat d'une autre manière en utilisant l'opérateur de retard. On sait en effet que

$$(1 - \varphi_1 L) \sqrt{x} = \mu + a_x \text{ et donc } \sqrt{x} = \frac{1}{1 - \varphi_1 L} (\mu + a_x)$$

l'expression  $\frac{1}{1 - \varphi_1 L}$  peut se calculer aisément par une division polynomiale usuelle :

$$\begin{array}{r} 1 \quad | \quad (1 - \varphi_1 L) \\ (1 - \varphi_1 L) \quad | \quad 1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots \\ \hline \varphi_1 L \quad | \quad (\varphi_1 L - \varphi_1^2 L^2) \\ \hline \varphi_1^2 L^2 \quad | \quad (\varphi_1^2 L^2 - \varphi_1^3 L^3) \\ \hline \varphi_1^3 L^3 \quad | \quad \vdots \end{array}$$

et alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \frac{1}{1 - \varphi_1 L} (\mu + a_x) = (1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots) (\mu + a_x) \\ &= (1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots) \mu + (1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \dots) a_x \\ &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \dots) \mu + (a_x + \varphi_1 a_x + \varphi_1^2 a_x + \dots) \end{aligned}$$

car  $L^i \mu = \mu \forall i$   
puisque  $\mu = \text{conste}$

$$= \frac{\mu}{1 - \varphi_1} + (a_x + \varphi_1 a_{x-1} + \varphi_1^2 a_{x-2} + \dots)$$



## Processus stochastiques stationnaires en moyenne mobile

Les processus stochastiques en moyenne mobile peuvent s'écrire comme la somme d'une constante, de la valeur courante d'un bruit blanc et d'une combinaison linéaire finie des valeurs passées du bruit blanc.

Un processus stochastique  $(Y_t)_{1 \leq t \leq T}$  est dit en moyenne mobile d'ordre  $q$ , et noté  $MA(q)$  ou  $ARMA(0, q)$  si :

$$\forall t : Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

où le processus stochastique  $\{a_t\}$  est un bruit blanc. Le signe "-" associé aux  $\theta_i$  est purement conventionnel.

Exemple :

- Processus  $MA(1)$  ou  $ARMA(0, 1)$  :

$$\forall t : Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc

- Processus  $MA(2)$  ou  $ARMA(0, 2)$

$$\forall t : Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc

- Processus  $MA(4)$  ou  $ARMA(0, 4)$  : un exemple concret

Désignons par  $a_t$  le nombre de patients qui arrivent le jour  $t$  à l'Hôpital. Supposons que ce nombre est un "bruit blanc", de sorte que le nombre d'arrivants un jour n'est pas lié à celui d'un autre jour. Supposons que 10% des pa-

La stationnarité de ce processus n'impose aucune restriction sur les coefficients, pourvu que tous les  $\theta$  et la variance  $a$  soient inférieurs à l'infini. Un modèle MA( $q$ ), n'a de sens que s'il est inversible, ce qui implique qu'il peut s'écrire comme un modèle autorégressif avec une infinité de retards. Pour cela, les racines du polynôme caractéristique  $(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q)$  doivent être en dehors du cercle unité. Quand ces racines sont réelles, elles doivent être strictement inférieures à -1 ou strictement supérieures à 1.

Considérons le cas d'un MA(1) :

$$y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$\theta_1 y_{t-1} = \theta_1 \mu + \theta_1 a_{t-1} - \theta_1^2 a_{t-2}$$

$$\theta_1^2 y_{t-2} = \theta_1^2 \mu + \theta_1^2 a_{t-2} - \theta_1^3 a_{t-3}$$

$$\theta_1^3 y_{t-3} = \theta_1^3 \mu + \theta_1^3 a_{t-3} - \theta_1^4 a_{t-4}$$

$$\vdots$$

$$\theta_1^p y_{t-p} = \theta_1^p \mu + \theta_1^p a_{t-p} - \theta_1^{p+1} a_{t-p-1}$$

il vient :

$$y_t = (1 + \theta_1 + \dots + \theta_1^p) \mu - \theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} - \theta_1^3 y_{t-3} - \dots - \theta_1^p y_{t-p} + a_t - \theta_1^{p+1} a_{t-p-1}$$

Il est clair que si  $-1 < \theta_1 < 1$ ,  $\theta_1^{p+1} \rightarrow 0$  qd  $p \rightarrow \infty$  et  $y_t$  s'écrit comme un modèle autorégressif avec une infinité de retards.



### c) Processus stochastiques mixtes stationnaires

Un processus stochastique  $\{Y_t\}$  est dit mixte ou auto-régressif en moyenne mobile d'ordres  $p$  et  $q$ , et noté  $ARMA(p, q)$  si :

$$\forall t : Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

où le processus stochastique  $\{a_t\}$  est un bruit blanc.

Exemple :

un processus  $ARMA(1, 1)$  évolue de la manière suivante

$$\forall t : Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc.

Les conditions de stationnarité sont les mêmes que celles des processus autorégressifs

### II-2 Typologie des processus stochastiques non stationnaires

#### a) Processus stochastiques non stationnaires à tendance uniquement déterministe

Un processus stochastique non stationnaire à tendance uniquement déterministe évolue de la manière suivante :

$$Y_t = g_t + v_t \quad \text{pour tout } t = 1, \dots, T$$

où  $g_t$  est une fonction déterministe (mécanique, non aléatoire) du temps et où  $v_t$  est une composante aléatoire.

Stationnaire;  $x$  étant un processus stochastique stationnaire qui n'est pas nécessairement un bruit blanc : être autocorrélé, lié à ses valeurs passées. Le théorème de Kolmogorov montre qu'un processus stochastique stationnaire d'espérance mathématique nulle peut toujours être écrit comme une combinaison linéaire des valeurs courantes et passées d'un bruit blanc : Le terme de tendance stochastique

$$x_t = u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \dots \text{ pour tout } t$$

où  $u_t$  est un bruit blanc. Si l'on utilise la notation de l'opérateur de retard, on obtient :

$$x_t = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) u_t = \psi(L) u_t \text{ pour tout } t$$

où  $\psi(L)$  est un polynôme en l'opérateur de retard  $L$ . Un processus stochastique non stationnaire à tendance déterministe évolue de la manière suivante :

$$y_t = g_t + \psi(L) u_t \quad \forall t = 1, \dots, T$$

Étant donné que la partie aléatoire  $x_t$  de  $y_t$  est stationnaire, la non-stationnarité de  $y_t$  est inhérente uniquement à sa partie déterministe  $g_t$ .

### Exemples :

- Soient  $g_t$  un polynôme du 1<sup>er</sup> degré en  $t$  et  $x_t$  un bruit blanc (tous les  $\psi_i = 0$  et donc  $x_t = u_t$ ). L'évolution de  $y_t$  est décrite par la relation suivante :

$$y_t = \mu + \beta t + u_t \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$



Le terme  $\mu + \beta t$  est la partie déterministe de  $y_t$ , à une tendance déterministe linéaire. Le terme  $u_t$  est la partie aléatoire ou stochastique de  $y_t$  : elle est stationnaire

- Soient  $g_t$  un polynôme du 2<sup>e</sup> degré en  $t$  et  $v_t$  un bruit blanc (tous les  $\psi_i = 0$  et donc  $v_t = u_t$ ). L'évolution de  $y_t$  est décrite par la relation suivante :

$$y_t = \mu + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + u_t \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

Le terme  $\mu + \beta_1 t + \beta_2 t^2$  est la partie déterministe de  $y_t$ , à tendance déterministe quadratique. Le terme  $u_t$  est la partie aléatoire ou stochastique de  $y_t$  : elle suit un modèle MA(1) (sans dérive et avec  $\theta_1 = 0$ ) stationnaire.

- Soient  $g_t$  un polynôme du 1<sup>er</sup> degré en  $t$  et  $v_t$  un modèle MA(1) (les  $\psi_i = 0$  pour  $i \neq 1$  et donc  $v_t = u_t + \psi_1 u_{t-1}$ )

L'évolution de  $y_t$  est décrite par la relation suivante :

$$y_t = \mu + \beta t + u_t + \psi_1 u_{t-1} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

Le terme  $\mu + \beta t$  est la partie déterministe de  $y_t$ , à tendance déterministe linéaire. Le terme  $u_t + \psi_1 u_{t-1}$  est la partie aléatoire ou stochastique de  $y_t$  : elle est stationnaire.

- Soient  $g_t$  un polynôme du 1<sup>er</sup> degré en  $t$  et  $v_t$  un modèle AR(2) stationnaire (tous les  $\psi_i$  sont différents de 0 et  $v_t = \frac{u_t}{1 - \psi_1 L - \psi_2 L^2}$ ). L'évolution de  $y_t$  est décrite par :

la relation suivante :

$$Y_t = \mu + \beta t + \varepsilon_t \quad \text{ou} \quad \varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t-2} + u_t$$

La fonction  $\mu + \beta t$  est la partie déterministe de  $Y_t$ , à tendance déterministe linéaire. Le terme  $\frac{u_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2}$  est la partie aléatoire ou stochastique de  $Y_t$  : cette partie est stationnaire.

Pour simplifier la présentation des caractéristiques d'un processus à tendance déterministe linéaire, on se limite au cas le plus fréquent :

$$Y_t = \mu + \beta t + \varepsilon_t \quad \text{ou} \quad \varepsilon_t = \psi(L) u_t$$

L'espérance mathématique de  $Y_t$  varie dans le temps de manière déterministe :

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(\mu + \beta t + \varepsilon_t) = \mu + \beta t + \psi(L) E(u_t) \\ &= \mu + \beta t \quad \forall t = 1, \dots, T \quad \text{puisque } E(u_t) = 0 \end{aligned}$$

On peut expliciter la valeur de  $Y_t$  et de son espérance mathématique à chaque période :

$$t=1 : Y_1 = \mu + \beta + \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad E(Y_1) = \mu + \beta$$

$$t=2 : Y_2 = \mu + 2\beta + \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad E(Y_2) = \mu + 2\beta$$

$$t=3 : Y_3 = \mu + 3\beta + \varepsilon_3 \quad \text{et} \quad E(Y_3) = \mu + 3\beta$$

⋮

$Y_t$  augmente mécaniquement de  $\beta$  à chaque période. A chaque période, la partie aléatoire de  $Y_t$  est  $\varepsilon_t$ , qui est stationnaire autour d'une



tendance déterministe. L'augmentation mécanique de l'espérance est la seule cause de la non stationnarité de  $y_t$ , qui est de nature purement déterministe : la partie déterministe de  $y_t$  n'est pas stationnaire, contrairement à sa partie aléatoire. La variance de  $y_t$  est constante dans le temps parce que  $v_t$  est stationnaire :

$$\text{Var}(y_t) = \text{Var}(v_t) = \sigma_v^2 \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

b) Processus stochastiques non stationnaires à tendance stochastique.

Les processus stochastiques non stationnaires à tendance stochastique sont dit intégrés ou à racines unitaires.

Un processus stochastique est non stationnaire à tendance stochastique quand une ou plusieurs racines unitaires figurent dans sa partie autorégressive, ce qui implique que la somme de ses coefficients autorégressifs est égale à 1.

tout processus  $\{y_t\}$  peut en effet être représenté approximativement par un modèle AR(p), où p est suffisamment grand pour capter toute la dynamique de  $\{y_t\}$  :

$$\forall t : y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

Si l'on utilise la notation de l'opérateur de retard, on obtient :

$$\forall t : (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = \mu + u_t$$

où le processus stochastique  $\{u_t\}$  est un bruit blanc.

$y_t$  est à tendance stochastique si  $\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p = 1$ . Cela implique qu'une racine unitaire figure dans le polynôme

caractéristique  $(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p)$  du processus.

Exemple :

Soit le processus  $y_t$  tel que :

$$y_t = y_{t-1} + u_t \quad \begin{array}{l} \text{marche} \\ \text{sans d\u00e9rive} \end{array}$$

$$y_t = y_{t-1} + \mu + u_t \quad \begin{array}{l} \text{marche al\u00e9.} \\ \text{avec d\u00e9rive} \end{array}$$

où  $u_t$  est un bruit blanc et  $\mu$  est une d\u00e9rive. Un tel processus est appel\u00e9 "marche au hasard (al\u00e9atoire) avec d\u00e9rive" ou "marche al\u00e9atoire avec d\u00e9rive". La pr\u00e9c\u00e9dente \u00e9quation est \u00e9quivalente \u00e0 :

$$(1 - L)y_t = y_t - y_{t-1} = \mu + u_t$$

$(y_t - y_{t-1})$  est donc stationnaire et il suffit de diff\u00e9rencier une fois  $y_t$  pour obtenir une expression stationnaire. On dit que le processus est int\u00e9gr\u00e9 d'ordre 1. La racine du polyn\u00f4me caract\u00e9ristique  $(1 - L)$  est \u00e9gale \u00e0 1. On dit donc que le processus  $y_t$  a une racine unitaire. On peut expliciter la valeur du processus et celle de sa variance \u00e0 chaque p\u00e9riode :

$$t=1 : y_1 = \mu + y_0 + u_1 \quad \text{et } E(y_1) = \mu + y_0, V(y_1) = \sigma^2$$

$$t=2 : y_2 = \mu + y_1 + u_2 = 2\mu + y_0 + u_1 + u_2 \quad \text{et } E(y_2) = 2\mu + y_0, V(y_2) = 2\sigma^2$$

$$t=3 : y_3 = \mu + y_2 + u_3 = 3\mu + y_0 + u_1 + u_2 + u_3 \quad \text{et } E(y_3) = 3\mu + y_0, V(y_3) = 3\sigma^2$$

...

Le processus  $y_t$  se forme par accumulation des chocs al\u00e9atoires  $u_t$  si bien que sa variance augmente avec le temps. Il s'agit d'un cas de non stationnarit\u00e9 d'origine al\u00e9atoire, stochastique : l'accumulation de chocs al\u00e9atoires est la tendance stochastique.



Toute période  $t$ , le processus vaut donc :

$$Y_t = \mu t + Y_0 + (u_1 + u_2 + \dots + u_t)$$

Cela implique que :

$$E(Y_t) = \mu t + Y_0 \quad \text{et} \quad \text{var}(Y_t) = t \sigma_u^2$$

$= Y_0$  (constante) si  $\mu = 0$  (sans dérive)

La somme  $(u_1 + u_2 + \dots + u_t)$  est la tendance stochastique et la partie déterministe de  $Y_t$  est  $(\mu t + Y_0)$ . A la tendance stochastique s'ajoute une tendance déterministe si  $\mu$  est différent de 0 ; sinon, le processus est une marche aléatoire sans dérive.

Les caractéristiques d'un processus stochastique  $Y_t$  non stationnaire à tendance stochastique sont :

- l'espérance mathématique de  $Y_t$  est constante en l'absence de dérive (terme constant) et varie dans le temps en cas de dérive : une tendance déterministe s'ajoute alors à la tendance stochastique ;
  - la variance de  $Y_t$  varie dans le temps ;
  - l'effet d'un choc  $u_t$  est permanent : il affecte de la même manière toutes les valeurs  $Y_{t+i}$  ultérieures.
- (la tendance stochastique est alors donnée par  $(u_1 + u_2 + \dots + u_t + u_{t+i})$ )

### III Tests de racine unitaire

#### III-1 Position du problème (Quel est le problème ?)

Lorsqu'on travaille avec une ou plusieurs séries économiques observées, il est important de déterminer

✕ pour chaque série, si le processus stochastique  $x_t$  est la réalisation est :

- stationnaire ;
- non stationnaire à tendance uniquement déterministe (ou stationnaire autour d'une tendance déterministe)
- non stationnaire à tendance stochastique

L'importance de cette information est évidente dans les cas de figure suivants :

- — On souhaite spécifier et estimer un modèle où l'évolution d'une série économique n'est expliquée que par son passé. Il faut d'abord "stationnariser" la série (établir une transformation stationnaire de cette série) avant de chercher le meilleur modèle ARMA qui décrit l'évolution temporelle de cette transformation stationnaire. Or, si une série est non stationnaire, la nature de la transformation stationnaire diffère en fonction de la tendance (déterministe uniquement ou stochastique) du processus générateur de cette série.

→ Exemples :

Soit un processus stochastique  $y_t$  non stationnaire à tendance stochastique, et tel que  $y_t = y_{t-1} + u_t$ , où  $u_t$  est un bruit blanc. Dans ce cas, la transformation  $y_t - y_{t-1}$  est stationnaire. Le modèle ARMA appliqué à une telle transformation est alors appelé "modèle

- ARIMA" où le "I" rappelle qu'on modélise une transformation stationnaire d'une série "I" intégrée.

Soit un processus  
à tendance uniquement  
déterministe ou  
stochastique



Soit un processus stochastique  $\{Y_t\}$  non stationnaire à tendance uniquement déterministe et tel que  $Y_t = a + bt + u_t$  où  $u_t$  est un bruit blanc. Dans ce cas, la transformation  $(Y_t - bt)$  ou  $(Y_t - a - bt)$  est stationnaire.

- On souhaite estimer un modèle linéaire reliant plusieurs séries économiques (par exemple une variable dépendante et une ou plusieurs variables explicatives) et tester des hypothèses sur les paramètres de cette relation. Les techniques d'inférence statistique à utiliser sont différentes en fonction de la nature des processus stochastiques générateurs de ces séries :

insister !  
 → les techniques d'inférence statistique classique sont valables à condition qu'aucune série de la relation n'ait une tendance stochastique ;

→ les techniques liées à la problématique de la cointégration s'imposent lorsque des séries de la relation ont une tendance stochastique.

Les tests de racine unitaire permettent de tester l'hypothèse  $H_0$  qu'une série économique observée est la réalisation d'un processus stochastique non stationnaire à tendance stochastique, contre l'hypothèse  $H_1$  que ce processus est :

$H_1$  { (i) stationnaire à tendance uniquement déterministe  $(\rho - 1 < 0 \text{ et } \mu \neq 0)$   
 ou (ii) stationnaire  $(\rho - 1 < 0 \text{ et } \mu = 0)$

Les tests sont basés sur l'estimation préalable d'un modèle autorégressif  $AR(p)$  censé approcher le vrai comportement du processus stochastique dont la série observée est une réalisation.



## 2. Modélisation d'un processus par un modèle autorégressif $AR(p)$

Nous avons vu dans les pages précédentes que tout processus  $\{y_t\}$  peut être représenté approximativement par un modèle  $AR(p)$ , où  $p$  est suffisamment grand pour capter toute la dynamique de  $\{y_t\}$ . Un processus stochastique  $\{y_t\}$  est bien représenté par un modèle  $AR(p)$  général s'il existe des coefficients  $\mu$  et  $\varphi_i$ , pour  $i=1, \dots, p$ , tels que :

$$\forall t : y_t = \mu + \beta t + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + u_t$$

où le processus stochastique  $\{u_t\}$  est un bruit blanc. Ce modèle peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall t : y_t - y_{t-1} &= \mu + \beta t + (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p - 1) y_{t-1} - \\ &\quad (\varphi_2 + \dots + \varphi_p)(y_{t-2+1} - y_{t-2}) - (\varphi_3 + \dots + \varphi_p)(y_{t-3+1} - y_{t-3}) \\ &\quad - \dots - (\varphi_{p-1} + \varphi_p)(y_{t-(p-1)+1} - y_{t-(p-1)}) - \\ &\quad \varphi_p(y_{t-p+1} - y_{t-p}) + u_t \end{aligned}$$

Exemple : pour  $p=2$ , on a :

$$\forall t : y_t = \mu + \beta t + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + u_t$$

Il est équivalent d'écrire :

$$\forall t : y_t - y_{t-1} = \mu + \beta t + (\varphi_1 + \varphi_2 - 1) y_{t-1} - \varphi_2 (y_{t-2+1} - y_{t-2}) + u_t$$



Il est clair que les 2 formulations précédentes du modèle  $AR(p)$  sont rigoureusement équivalentes : en développant la deuxième formulation, on retrouve exactement la première. Cette deuxième formulation du modèle  $AR(p)$  est particulièrement pratique pour décrire les implications d'une racine unitaire. C'est ce que nous allons maintenant voir.

Procédons aux changements de variables suivants :

$$\rho = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_p$$

$$\lambda_1 = -(\varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_p)$$

$$\lambda_2 = -(\varphi_3 + \dots + \varphi_p)$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{p-2} = -(\varphi_{p-1} + \varphi_p)$$

$$\lambda_{p-1} = -\varphi_p$$

Si le processus stochastique  $\{Y_t\}$  a une racine unitaire, alors :

$$\rho = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_p = 1$$

Cela implique  $\rho - 1 = 0$ . Tester la présence d'une racine unitaire revient par conséquent à tester l'hypothèse que le coefficient de  $Y_{t-1}$  dans la deuxième formulation du modèle  $AR(p)$ , en l'occurrence  $\rho - 1$ , est égal à 0.

En prenant en compte les changements de variables ci-dessus, le modèle  $AR(p)$  s'écrit maintenant :

$$\forall t : \Delta Y_t = \mu + \beta t + (\rho - 1) Y_{t-1} + \lambda_1 \Delta Y_{t-1} + \lambda_2 \Delta Y_{t-2} + \dots$$

$$\dots + \lambda_{p-2} \Delta Y_{t-p+2} + \lambda_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t$$

Il est intéressant de noter que lorsque  $p=1$ ,

Processus, con-  
variables en pos

$$\forall t: \Delta Y_t = \mu + \beta t + (\rho - 1)Y_{t-1} + u_t ; \text{ avec } \rho = \frac{p}{1}$$

Lorsque  $p=2$ , on a :

$$\forall t: \Delta Y_t = \mu + \beta t + (\rho - 1)Y_{t-1} + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + u_t$$

avec  $\rho = \varphi_1 + \varphi_2$  et  $\alpha_1 = -\varphi_2$ . Revenons alors sur le modèle général AR(p). Si le processus  $\{Y_t\}$  a une racine unitaire (c'est-à-dire si le coefficient de  $Y_{t-1}$ , à savoir  $\rho - 1$ , est égal à 0) son évolution peut alors être représentée par :

$$\forall t: \Delta Y_t = \mu + \beta t + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \alpha_{p-2} \Delta Y_{t-p+2} + \alpha_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t$$

il nous faudrait déterminer l'ordre d'intégration de la série

Avec  $\rho - 1 = 0$ , nous avons déduit que  $\{Y_t\}$  a une racine unitaire (existence d'une tendance stochastique). Il faudrait alors déterminer l'existence d'une racine unitaire (ou non) pour le processus  $\{\Delta Y_t\}$ . Nous partons donc du processus ci-dessus (lequel intègre déjà le fait que  $\rho - 1 = 0$ ). Il vient alors (formulation équivalente du processus ci-dessus):

$$\begin{aligned} \forall t: \Delta \Delta Y_t = & \mu + \beta t + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{p-1} - 1) \Delta Y_{t-1} - \\ & (\alpha_2 + \dots + \alpha_{p-1}) \Delta \Delta Y_{t-1} - (\alpha_3 + \dots + \alpha_{p-1}) \Delta \Delta Y_{t-2} - \\ & \dots - (\alpha_{p-2} + \alpha_{p-1}) \Delta \Delta Y_{t-(p-2)+1} - \alpha_{p-1} \Delta \Delta Y_{t-(p-1)+1} \end{aligned}$$



Procédons, comme tout à l'heure, à des changements de variables en posant :

$$\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p-1}$$

$$\delta_1 = -(\lambda_2 + \dots + \lambda_{p-1})$$

$$\delta_2 = -(\lambda_3 + \dots + \lambda_{p-1})$$

...

$$\delta_{p-3} = -(\lambda_{p-2} + \lambda_{p-1})$$

$$\delta_{p-2} = -\lambda_{p-1}$$

Si le processus stochastique  $\{\Delta y_t\}$  a une racine unitaire, alors :

$$\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p-1} = 1$$

Cela implique  $\delta - 1 = 0$ . Tester la présence d'une racine unitaire, dans le cas présent, revient à tester l'hypothèse que le coefficient de  $\Delta y_{t-1}$ , en l'occurrence  $\delta - 1$ , est égal à 0. Si  $\delta - 1 < 0$ , alors  $\{\Delta y_t\}$  ne présente pas de tendance stochastique.

En prenant en compte les changements de variables, le modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall t : \Delta \Delta y_t &= \mu + \beta t + (\delta - 1) \Delta y_{t-1} + \delta_1 \Delta \Delta y_{t-1} + \delta_2 \Delta \Delta y_{t-2} + \\ &\dots + \delta_{p-3} \Delta \Delta y_{t-p+3} + \delta_{p-2} \Delta \Delta y_{t-p+2} + u_t \end{aligned}$$

$\underbrace{t-p+3}_{t-(p-3)} \qquad \qquad \qquad \underbrace{t-p+2}_{t-(p-2)}$

Au total :

Recherche d'une 2<sup>e</sup> racine unitaire

$$\Delta y_t = \mu + \beta t$$

- qd  $(\rho-1) > 0$ ,  $\{y_t\}$  explosif
- Si  $(\rho-1) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_p - 1) = 0$ , le processus stochastique  $\{y_t\}$  a une racine unitaire;  $(\rho-1)$  est tout simplement le coefficient de  $y_{t-1}$  dans le modèle AR(p) version transformée (p. 93); donc, le fait que l'on ait  $(\rho-1) < 0$  atteste de l'absence d'une racine unitaire; lorsque  $(\rho-1) < 0$ , alors  $\{y_t\}$  est  $I(0)$ ;
  - Si, après que l'on a trouvé  $\rho-1 = 0$ , on trouve  $\delta-1 < 0$  (où  $(\delta-1)$  est le coefficient de  $\Delta y_{t-1}$ , cf page 95), alors on en conclura qu'il aura fallu différencier la série  $\{y_t\}$  une fois pour la stationnariser: la série  $\{y_t\}$  est intégrée d'ordre 1 et la série  $\{\Delta y_t\}$  est stationnaire: la transformation  $\{\Delta y_t\}$  de  $\{y_t\}$  est stationnaire;
  - Si, après que l'on a trouvé  $\rho-1 = 0$ , on trouve  $\delta-1 = 0$ , on en conclura que la transformation  $\{\Delta y_t\}$  de  $\{y_t\}$  a aussi une racine unitaire. Dans ces conditions, la nouvelle transformation  $\{\Delta \Delta y_t\}$  de  $\{y_t\}$  ne sera stationnaire que dans l'hypothèse où l'on aurait  $(\theta-1) = (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{p-2} - 1) < 0$ : on dira que  $\{y_t\}$  est intégré d'ordre 2: il suffit de différencier ce processus deux fois pour le rendre stationnaire.

N.B., en effet:

Si le processus  $\{\Delta y_t\}$  a aussi une racine unitaire, son évolution peut alors être représentée par (puisque alors  $\delta-1 = 0$ ):



(97)

avec fait :  $\Delta \Delta Y_t = \mu + \beta t + \gamma_1 \Delta \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta \Delta Y_{t-2} + \dots$   
 $\dots + \gamma_{p-3} \Delta \Delta Y_{t-(p-3)} + \gamma_{p-2} \Delta \Delta Y_{t-(p-2)} + u_t$

Avec  $\delta-1=0$ , nous avons déduit que  $\{\Delta Y_t\}$  a une racine unitaire (existence d'une tendance stochastique).  
 Il faudrait alors chercher à savoir si oui ou non le processus  $\{\Delta \Delta Y_t\}$  possède une racine unitaire, pour en savoir un peu plus sur l'ordre d'intégration de la série  $\{Y_t\}$ . A cet effet, nous partons du processus ci-dessus (qui intègre déjà le fait que  $\delta-1=0$ ). Une formulation équivalente de ce processus serait :

avec :  $\Delta \Delta \Delta Y_t = \mu + \beta t + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2} - 1) \Delta \Delta \Delta Y_{t-1} -$   
 $(\gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2}) \Delta \Delta \Delta Y_{t-1} - \dots -$   
 $(\gamma_{p-3} + \gamma_{p-2}) \Delta \Delta \Delta Y_{t-(p-3)+1} - \gamma_{p-2} \Delta \Delta \Delta Y_{t-(p-2)+1} + u_t$

Soient les changements de variables :

$\Theta = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2}$   
 $\gamma_1 = -(\gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2})$   
 $\gamma_2 = -(\gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2})$   
 $\vdots$   
 $\gamma_{p-4} = -(\gamma_{p-3} + \gamma_{p-2})$

soit :

$$\left\{ \begin{aligned} Y_t : \Delta\Delta\Delta Y_t &= \mu + \beta t + (\theta - 1)\Delta\Delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta\Delta\Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta\Delta\Delta Y_{t-2} \\ &\dots + \gamma_{p-4} \Delta\Delta\Delta Y_{t-(p-4)} + \gamma_{p-3} \Delta\Delta\Delta Y_{t-(p-3)} \end{aligned} \right.$$

Il est alors clair, ici, que si  $\theta = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{p-2} < 1$  (autrement dit si  $\theta - 1 < 0$ ), on dira que le processus stochastique  $\{\Delta\Delta Y_t\}$  ne possède pas de racine unitaire.

○ Au total, nous aurons eu :

- $\{Y_t\}$  possède une racine unitaire :  $\rho - 1 = 0$  ;
- $\{\Delta Y_t\}$  possède une racine unitaire :  $\delta - 1 = 0$  ;
- $\{\Delta\Delta Y_t\}$  ne possède pas de rac. unitaire ( $\theta - 1 < 0$ ) et est stationnaire.

$\Rightarrow$  nous en déduisons que  $\{Y_t\}$  est  $I(2)$  : il aura fallu différencier  $\{Y_t\}$  deux fois pour stationnariser la série. On arrête les exercices de différenciation.

Par contre, si  $\theta - 1 = 0$ , on en déduira que  $\{\Delta\Delta Y_t\}$  a 1 racine unitaire. Pour alors déterminer l'ordre d'intégration de  $\{Y_t\}$ , il faudra chercher à savoir si oui ou non le processus stochastique  $\{\Delta\Delta\Delta Y_t\}$  a une racine unitaire... ainsi de suite, jusqu'à obtenir par les différenciations successives, un processus stationnaire.

○ Il importe de remarquer que l'ordre "d" d'intégration de  $\{Y_t\} \rightarrow$  (le nombre de fois qu'il faudrait différencier la série pour la rendre stationnaire) ne dépend pas de  $p$  ou de  $(p-1) \rightarrow$  (il faudrait spécifier



(97)

$$\forall t: \Delta \Delta y_t = \mu + \beta t + \gamma_1 \Delta \Delta y_{t-1} + \gamma_2 \Delta \Delta y_{t-2} + \dots$$

$$\dots + \gamma_{p-3} \Delta \Delta y_{t-(p-3)} + \gamma_{p-2} \Delta \Delta y_{t-(p-2)} + u_t$$

Avec  $\delta-1=0$ , nous avons déduit que  $\{\Delta y_t\}$  a une racine unitaire (existence d'une tendance stochastique).

Il faudrait alors chercher à savoir si oui ou non le processus  $\{\Delta \Delta y_t\}$  possède une racine unitaire, pour en savoir un peu plus sur l'ordre d'intégration de la série  $\{y_t\}$ . A cet effet, nous partons du processus ci-dessus (qui intègre déjà le fait que  $\delta-1=0$ ). Une formulation équivalente de ce processus serait :

$$\forall t: \Delta \Delta \Delta y_t = \mu + \beta t + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2} - 1) \Delta \Delta y_{t-1} -$$

$$(\gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2}) \Delta \Delta \Delta y_{t-1} - \dots -$$

$$(\gamma_{p-3} + \gamma_{p-2}) \Delta \Delta \Delta y_{t-(p-3)+1} - \gamma_{p-2} \Delta \Delta \Delta y_{t-(p-2)+1} + 1$$

soient les changements de variables :

$$\theta = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2}$$

$$\gamma_1 = -(\gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2})$$

$$\gamma_2 = -(\gamma_3 + \dots + \gamma_{p-2})$$

⋮

$$\gamma_{p-4} = -(\gamma_{p-3} + \gamma_{p-2})$$

$$\gamma_{p-3} = -\gamma_{p-2}$$

soit :

$$\left\{ \begin{aligned} \forall t : \Delta\Delta\Delta Y_t &= \mu + \beta t + (\theta - 1)\Delta\Delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta\Delta\Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta\Delta\Delta Y_{t-2} + \dots \\ &\quad + \gamma_{p-4} \Delta\Delta\Delta Y_{t-(p-4)} + \gamma_{p-3} \Delta\Delta\Delta Y_{t-(p-3)}, \end{aligned} \right.$$

Il est alors clair, ici, que si  $\theta = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{p-2} < 1$  (autrement dit si  $\theta - 1 < 0$ ), on dira que le processus stochastique  $\{\Delta\Delta Y_t\}$  ne possède pas de racine unitaire.

○ Au total, nous aurons en :

- $\{Y_t\}$  possède une racine unitaire :  $\beta - 1 = 0$  ;
- $\{\Delta Y_t\}$  possède une racine unitaire :  $\delta - 1 = 0$  ;
- $\{\Delta\Delta Y_t\}$  ne possède pas de rac. unitaire ( $\theta - 1 < 0$ ) et est stationnaire.

$\Rightarrow$  nous en déduisons que  $\{Y_t\}$  est  $I(2)$  : il aura fallu différencier  $\{Y_t\}$  deux fois pour stationnariser la série. On arrête les exercices de différenciation.

Par contre, si  $\theta - 1 = 0$ , on en déduira que  $\{\Delta\Delta Y_t\}$  a 1 racine unitaire. Pour alors déterminer l'ordre d'intégration de  $\{Y_t\}$ , il faudra chercher à savoir si oui ou non le processus stochastique  $\{\Delta\Delta\Delta Y_t\}$  a une racine unitaire... ainsi de suite, jusqu'à obtenir par les différenciations successives, un processus stationnaire.

○ Il importe de remarquer que l'ordre "d" d'intégration de  $\{Y_t\} \rightarrow$  (le nombre de fois qu'il faudrait différencier la série pour la rendre stationnaire) ne dépend pas de  $p$  ou de  $(p-1) \rightarrow$  (il faudrait spécifier



un modèle autorégressif avec  $p$  retards ou  $(p-1)$  différences retardées, de manière à obtenir un terme d'erreur  $u_t$  qui soit un bruit blanc.

### III - 3 Tests de DICKEY FULLER

#### a) Tests de DICKEY et FULLER simples (1979)

Ils permettent de mettre en évidence le caractère stationnaire ou non d'une série temporelle par la détermination d'une tendance déterministe ou stochastique à partir des modèles AR(1) suivants :

cf. mod. équiv. de la p. 92

$\{y_t\}$  admet-elle tend. sto-  
chast. et tend. détermin.

$$\Delta y_t = (\varphi - 1)y_{t-1} + u_t$$

AR(1) sans dérive

$$\Delta y_t = (\varphi - 1)y_{t-1} + \mu + u_t$$

AR(1) avec dérive

$$\Delta y_t = (\varphi - 1)y_{t-1} + \mu + \beta t + u_t$$

AR(1) avec dérive et tendance détermin.

Si  $H_0 : \varphi - 1 = 0$  est retenue dans l'un de ces trois modèles, le processus est alors non stationnaire. Dans le dernier, si l'on accepte  $H_1 : \varphi - 1 < 0$  et si  $\beta$  est significativement différent de 0, alors le processus est un processus TS : la série  $\{y_t\}$  admet une tendance déterministe, avec abs. tend. sto.

Cependant, sous  $H_0$ , les règles habituelles de l'inférence statistique ne peuvent pas être appliquées pour tester cette hypothèse, en particulier la distribution de Student du paramètre  $(\hat{\varphi} - 1)$ . Les auteurs ont alors élaboré des tables spéciales (analogues aux tables de Student) pour le paramètre  $(\hat{\varphi} - 1)$ .

Par ailleurs, dans les modèles ci-dessous, le  $\{u_t\}$  est par hypothèse un bruit blanc. Or il n'y a aucune raison pour que, a priori, l'erreur soit non corrélée. On appelle tests de Dickey-Fuller Augmentés (ADF, 1981) la prise en compte de cette hypothèse.

Le test se détermine de la façon suivante : on considère des séries de données et on les teste pour voir si elles sont stationnaires ou non.

### b) Tests de Dickey-Fuller Augmentés

Les tests ADF sont fondés, sous l'hypothèse alternative  $(p-1) < 0$ , sur l'estimation par les m.c.o. des trois modèles :

et les modèles équivalents de la page 82 :

$$\begin{cases} - \Delta y_t = (p-1)y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \Delta y_{t-i} + u_t \\ - \Delta y_t = (p-1)y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \Delta y_{t-i} + \mu + u_t \\ - \Delta y_t = (p-1)y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \Delta y_{t-i} + \mu + \beta t + u_t \end{cases}$$

on veut tester l'existence d'une tendance polynomiale de degré  $p$  dans la série  $\{y_t\}$ .

correspond exactement au modèle équivalent de la page 82.

avec  $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$ . Sachant que :

on veut tester l'existence d'une tendance polynomiale de degré  $p$  dans la série  $\{y_t\}$ .

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_p \\ \lambda_1 &= -(\rho_1 + \dots + \rho_p) \\ \lambda_2 &= -(\rho_2 + \dots + \rho_p) \\ &\vdots \\ \lambda_{p-2} &= -(\rho_{p-1} + \rho_p) \\ \lambda_{p-1} &= -\rho_p \end{aligned}$$



Le test se déroule de manière similaire aux tests DF simples, seules les tables statistiques diffèrent. Dans chacun des cas, le test est basé sur l'estimation préalable d'un modèle autorégressif  $AR(p)$ , avec une valeur suffisante de  $p$ , pour que ce modèle soit une approximation acceptable du vrai processus stochastique dont la série observée est une réalisation.

Il importe donc de bien choisir  $p$ . Pour cela, on effectuera une régression pour obtenir par m.c.o., l'équation générale :

$$\Delta \hat{y}_t = \hat{\mu} + \hat{\beta}t + (\hat{\rho} - 1)y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \hat{\rho}_i \Delta y_{t-i}$$

en commençant par une valeur de  $p$  assez grande ; puis en réestimant cette équation successivement avec des  $p$  plus petits, de manière à s'arrêter à la valeur de  $p$  qui satisfait, par exemple, à l'un des deux critères suivants :

- On considère la plus petite <sup>valeur</sup> de  $p$  pour laquelle les résidus  $\hat{u}_t$  de l'équation estimée ne sont pas autocorrélés ;
- il pourrait s'agir de la valeur de  $p$  qui optimise un critère d'ajustement statistique du modèle (par exemple celle qui maximise le critère d'information de AKAIKE).