

Donner la priorité aux exercices avec (★).

1. CALCUL MATRICIEL

Exercice 1. (★) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) (a) Préciser le type de la matrice A , puis le type de sa transposée A^t .
(b) Déterminer la transposée A^t de la matrice A .
(c) On a $a_{12} = 7, a_{23} = 8$.
- (2) Calculer: a) $A + 2B$, b) $C - 3D$, c) CA , d) C^3 , e) CD^2 , f) D^2B .

Exercice 2. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer J^2 et J^3 .
- (2) Calculer l'inverse de la matrice: A .
- (3) Calculer B^2 , B^n .
- (4) Soit $C = I_3 + B$. Calculer C^n .
- (5) Montrer que $D^n = \alpha_n D + \beta_n I_3$ avec α_n et β_n des réels à déterminer

Exercice 3. (★) Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m^2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

- (1) (a) Calculer le déterminant de A .
(b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles A est inversible.
(c) Pour $m = 1$, justifier que C est inversible et calculer C^{-1} .
- (2) (a) Calculer B^2 , B^3 .
(b) Dire en justifiant si B est nilpotente et préciser son indice de nilpotence.

Exercice 4. Soit les matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -5 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

- (1) Pour la matrice A :
(1.1) Calculer A^2 , déterminer la trace de A , puis Calculer $C = A.A^t$, avec A^t la transposée de A .

- (1.2) Justifier pourquoi C est une matrice symétrique.
- (1.3) Déterminer le rang de A .
- (2) Pour la matrice B :
 - (2.1) Déterminer la transposée B^t de la matrice B .
 - (2.2) Echelonner la matrice B , puis déduire le rang de la matrice B .
- (3) Calculer le déterminant de la matrice C suivant la deuxième colonne, puis suivant la troisième ligne.

Exercice 5. (★) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- (1) En utilisant la méthode de Sarrus calculer le déterminant de B .
- (2) Déterminer la comatrice de la matrice B .
- (3) Justifier que B est inversible et en utilisant les cofacteurs, déterminer la matrice inverse B^{-1} .
- (4) Calculer $A^2, AB^2, 2A - 3B$.

Exercice 6. (★) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer A^2, A^3 , puis $A^3 - 3A^2 - 2A$.
- (2) En déduire que A est une matrice inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A .
- (3) Déterminer A^{-1} .
- (4) Déterminer l'ensemble solution du système $A.X = (a, b, c)^t$, d'inconnue $(x, y, z)^t$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de chacune des matrices A et B (on pourrait échelonner).

2. SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 8. (★) Soit la matrice carrée d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer le déterminant de A , déterminer le rang de A . Dire en le justifiant si la matrice A est inversible.
- (2) Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse A^{-1} de A .

(3) Soit le système $(S) : \begin{cases} -2x - 3z = 5 \\ x + y + z = -3 \\ -x - z = 1 \end{cases}$.

Ecrire le système (S) sous la forme $AX + B$ où A, B et X sont des matrices à déterminer.

- (4) Déterminer X en utilisant A^{-1} .

Exercice 9. (★)

(1) Résoudre chacun des systèmes d'équations à trois inconnues suivants:

$$(S1) : \begin{cases} -2x - 3z = 5 \\ x + y + z = -3 \\ -x - z = 1 \end{cases}, (S2) : \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + y + z = 0 \\ 6x + 2y + 4z = 6 \end{cases}, (S3) : \begin{cases} 4x + y = 4 \\ 3x - 3y + z = 2 \\ -9x + 2y - z = 5 \end{cases}, (S4) : \begin{cases} -2x - 2z = -8 \\ 3x + 4y - 5z = 1 \end{cases}$$

(2) Discuter et résoudre suivant $a \in \mathbb{R}$ le système $(S) : \begin{cases} 2x + y - 3z + a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4ay - 5z = 2a + 5 \end{cases}$.

(3) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$: $(S) : \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 3t + 1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}, (S) : \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$.

(4) Résoudre chacun des systèmes homogènes suivants:

$$(S) : \begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 9x + 12y + 3z = 0 \end{cases}, (S) : \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 0 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 0 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}, (S) : \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 0 \\ 9x + 12y + 3z + t = 0 \end{cases}.$$