Université de Yaoundé I Faculté des Sciences	Département de Mathématiques Filière: Chimie I

TD1 MATH 111 Année Académique 2024-2025.

NOMBRES COMPLEXES

Equipe pédagogique: Dr Guidzavai

1. Calculs dans $\mathbb{C}$

Exercice 1. (1) Calculer: a) $(3+5i)+(2i)(4-2i)$, b) $(4-5i)(3+2i)$, d) $(-1+3i)^3$, d) $\overline{(\frac{5+6i}{4-3i})}$.

(2) Mettre sous la forme $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ les nombres complexes suivants:

a) $\frac{3+6i}{3-4i}$, b) $(\frac{1+i}{2-i})^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$, c) $\frac{2+5i}{1-i}$.

(3) Ecrire sous la forme $z = a+ib$ les nombres complexes suivants:

a) z est un nombre complexe de module 2 et d' argument $\frac{\pi}{6}$. b) z est un nombre complexe de module 3 et d' argument $\frac{-\pi}{8}$.

(4) Calculer le module et un argument de : a) $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et b) $v = 1-i$. En déduire le module et un argument de $w = \frac{u}{v}$.

(5) Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe. Calculer $(z+\overline{z}).(z^2+\overline{z}^2)....(z^n+\overline{z}^n)$ en fonction de r et θ.

(6) Soit $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de: a) $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$. b) $Z = \frac{2z-1}{z^2}$.

2. Forme trigonométrique, forme exponentielle et formule de Moivre

Exercice 2. Déterminer le module et un argument de $z = (\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i})^2$. Puis sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle.

Exercice 3. Mettre sur la forme exponentielle les nombres complexes: $\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$, $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

Exercice 4. Calculer algébriquement $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$, puis trigonométriquement. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

3. Linéarisation et polynômes trigonométriques

Exercice 5. (1) Linéariser l' expression $f(x) = \sin(3x)\cos^2(2x)$.

(2) Linéariser: $g(x) = cos^4(x) + \sin^4(x)$, $k(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)$, h(x)= $\cos^3(x)\sin^3(x)$.

Exercice 6. (1) Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.

(2) Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.

(3) Ecrire $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

4. Racines n^{IEMES} d' un nombre complexe

Exercice 7. Calculer les racines carrées de : $1, i, 3+4i, 8-6i$ et $7+24i$. $24-10i$,$3-4i$.

Exercice 8. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et de $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 9. Trouver les racines cubiques de $2-2i$, et de $11+2i$.

5. Equations de degrés 1, 2, 3, 4 dans $\mathbb{C}$

Exercice 10. (1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes:

a) $z^2 + z + 1 = 0$, b) $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0.$, c) $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$. d) $z^2 - (3+4i)z - 1 = 0$.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^3 + 3z - 2i = 0$. b) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$, c) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

Exercice 12. (1) Déterminer les racines cubiques de 1.

(2) On note $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Exprimer toutes les racines cubiques de 1 en fonction de J.

(3) Montrer que$1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 13. Donner sous-forme polaire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$. (Ind: poser $u = z^3$ et calculer $(9+i)^2$).

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations: 1) $\cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \sin(3x)$ 2) $\cos^4(x) - \sin(x)^4 = 1$.

Exercice 15. (1) Résoudre l'équation (E): $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0$ sachant qu' elle possède une solution réelle.

(2) On suppose $0 \leq \theta \leq \pi$, résoudre (E'): $z^6 - 2z^3\cos(\theta) + 1 = 0$.

(3) Résoudre a) $(1 + i\sqrt{3})z^4 - 1 = 0$. b) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Exercice 16. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\Delta = -5 + 12i$, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation: (E): $iz^2 - iz - 3 - i = 0$. En déduire les solutions de l'équation (E'): $iz^4 - iz^2 - 3 - i = 0$.

Exercice 17. Soit l' équation (E): $z^3 + (1-i)z^2 + (4-i)z - 4I = 0$.

(1) Vérifier que i est une solution de (E).

(2) Trouver un polynôme P du second degré tel que $z^3 + (1-i)z^2 + (4-i)z - 4i = (z-i)P(z)$.

(3) Résoudre l' équation (E).

Exercice 18. Soit l' équation (E): $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1)0$ $(z \in \mathbb{C})$.

(1) Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est solution de (E).

(2) (a) Déterminer les nombres réels a, b tels que

$$(E) \Leftrightarrow z^2[(z - \frac{1}{z})^2 + a(z - \frac{1}{z}) + b].$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l' équation (E).