TD SUR LES NOMBRES COMPLEXES (BAC)

FORMES ALGÉBRIQUE ET TRIGONOMÉTRIQUE

Exercice F.1

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$
2. $z_2 = (1-2i)^2$
3. $z_3 = \frac{1}{1+3i}$
4. $z_4 = \frac{2-i}{1+i}$
5. $z_5 = (2+i)^3$
6. $z_6 = (1+i)^2 - (2-i)^2$

Exercice F.2

On donne les nombres complexes

$$z_1 = (\sqrt{6} + i\sqrt{2})\left(\frac{1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

1. *Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique $a + i\,b$.*
2. *Déterminer le module puis un argument de z_1, z_2 et $z_1 z_2$.*
3. *Déterminer le module puis un argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$, $Z' = z_2^6$. Écrire Z et Z′ sous forme algébrique.*

Exercice F.3

Déterminer le module et et un argument de $z = \left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$.

Exercice F.4

1. *Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Déterminer le module et un argument de :* $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$.
2. *En déduire le module et un argument, pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, de :*

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1}.$$

Exercice F.5

Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ soit réel.

Exercice F.6

On considère, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, le complexe $z = [1 - \sin\theta + i\cos\theta]^n$. Déterminer les réels θ tels que $\mathrm{Re}(z) = 0$.

POLYNÔMES, ÉQUATIONS, RACINES DE L'UNITÉ

Exercice P.&

Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - z^2 + (5 + 7i)z + 10 - 2i.$$

1. *Montrer que P possède une racine imaginaire pure.*
2. *En déduire une factorisation de P de la forme $P(z) = (z - 2i)Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré à coefficients complexes.*
3. *Résoudre alors $P(z) = 0$ et factoriser complètement le polynôme P sur $\mathbb{C}$.*

Exercice P.2

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -3+4i$
2. $z_2 = -5-12i$
3. $z_3 = -24-10i$
4. $z_4 = -i$

Exercice P.3

Déterminer les racines des polynômes suivants :

1. $z^2+iz+5-5i$
2. $z^2+z-iz-5i$
3. $z^2-iz+1-3i$
4. $z^2-3iz-3-i=0$

Exercice P.4

Déterminer :

1. Les racines troisièmes de -8.
2. Les racines cinquièmes de $-i$
3. Les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

Exercice P.5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z-1)^6+(z-1)^3+1=0 \quad (\star)$$

Exercice P.6

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation*

$$(1+iz)^5=(1-iz)^5 \quad (\star)$$

2. *En déduire les valeurs de $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$, que l'on exprimera sous la forme :*

$$\sqrt{p+q\sqrt{n}}, \quad (n,p,q)\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{Z}$$

3. *En déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{10}$.*

Exercice P.7

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

1. $1+\frac{z+i}{z-i}+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0$
2. $(z+i)^n=(z-i)^n$

Exercice P.8

Résoudre

$$z^3=\overline{z}$$

Exercice P.9

Soit ω une racine n-ième de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k.$$

Déterminer une valeur de S.
Indication 1.9 : On pourra calculer $(1-\omega)\,S$.

Exercice P.10

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$.

Exercice P.11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$$

Indication 1.9 : Multiplier par $(1-z)$.

Exercice P.12

Pour $n \geqslant 2$, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} \quad (p \in \mathbb{Z}), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k, \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|.$$

Exercice P.13

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ et soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On dit que ω est une racine primitive n-ième de l'unité si et seulement si toute racine n-ième de l'unité s'écrit comme une puissance de ω. Autrement dit :

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine primitive n-ième de l'unité si et seulement si k est premier avec n.

Exercice P.14

Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ et considérons $X = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $Y = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Montrer que $Y = \overline{X}$ et que $\operatorname{Im} X > 0$.
2. Calculer $X + Y$ et XY. En déduire que X et Y sont solutions d'une équation du second degré puis calculer X et Y.
3. Exprimer $\operatorname{Re} X$ en fonction de $\cos \frac{2\pi}{7}$.
4. En déduire que $\cos \frac{2\pi}{7}$ est une racine du polynôme $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$.

APPLICATION À LA TRIGONOMÉTRIE

Exercice A.1

Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin^2 x$
2. $\cos^4 x$
3. $\sin^4 x$
4. $\sin^5 x$.
5. $\cos x \sin^2 x$
6. $\cos^2 x \sin^2 x$
7. $\cos a \cos b$
8. $\cos a \cos b \cos c$

Exercice A.2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, transformer :

1. $\cos(3x)$ *en un polynôme en* $\cos x$.
2. $\sin(3x)$ *en un polynôme en* $\sin x$.
3. $\cos(4x)$ *en un polynôme en* $\cos x$.

Exercice A.3

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(2x) + \cos(x) = 0$
2. $\sin x \cos x = 1/4$
3. $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$
4. $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$
5. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
6. $\sin x - 1/\sin x = 3/2$.
7. $\sin x + \sin 3x = 0$
8. $3\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{6}$

Exercice A.4

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(2x) + \cos(x) = -1$
2. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$
3. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -1$

Exercice A.5

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. *Montrer que :*

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

2. *En déduire :*

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

3. *En déduire :*

$$\sum_{k=0}^{n} k \sin k\theta.$$

Exercice A.6

On pose

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad B = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad C = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

1. *En utilisant la trigonométrie, montrer que* A *vérifie une équation du second degré.*
2. *Exprimer* A , B , C *en utilisant des racines carrées.*

Exercice A.7

Calculer la somme

$$S = \sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$$

Exercice A.8

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *calculer les sommes suivantes :*

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx$
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$ *(avec* $x \neq \pi/2\ [\pi]$*).*
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin kx}{\cos^k x}$ *(avec* $x \neq \pi/2\ [\pi]$*).*

Exercice A.9

Calculer $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \cos^n\left(\frac{p\pi}{n}\right)$.

APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES À LA GÉOMÉTRIE

Exercice G.1

Sot z *un nombre complexe non nul. Placer sur un dessin les points d'affixes respectives*

1. $z, -z, \overline{z}$ *et* $-\overline{z}$.
2. $z, 2z, iz, i\overline{z}$ *et* $z+1+i$ *et* $\sqrt{2}(1+i)z$.
3. $z, z^{-1}, \overline{z}$ *et* z^3 *si* $|z| = 1$.

Exercice G.2

Déterminer et représenter les ensembles de nombres complexes :

1. $E_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = z\}$.
2. $E_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 4\}$.
3. $E_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$.
4. $E_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1+2i| = 1\}$.
5. $E_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = -1\}$
6. $E_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \pi/4\ [\pi]\}$
7. $E_7 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \pi/3\ [2\pi]\}$.
8. $E_8 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1) = \pi/6\ [\pi]\}$
9. $E_9 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1+2i) = \pi/2\ [2\pi]\}$

Exercice G.3

Soient $A(1+i)$ *et* $B(4+3i)$.

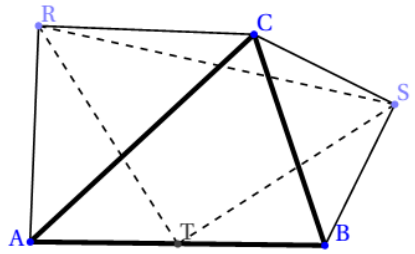
1. *Trouver l'affixe du point* C *pour que le triangle* ABC *soit équilatéral direct.*
2. *Trouver l'affixe des points* D *et* E *pour que le quadrilatère* ABDE *soit un carré direct.*

Exercice G.4

Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle unité.

Exercice G.5

Soit ABC *un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles* ARC *et* BSC *isocèles et rectangles respectivement en* R *et* S. *Si* T *est le milieu de* [AB], *montrer que* RST *est rectangle et isocèle en* T.



Exercice G.6

Trouver tous les nombres complexes tel que les points M, N, P *d'affixes respectives z, z^2 et z^4 sont alignés.*

Exercice G.7 : Construction à la règle et au compas du pentagone régulier

1. (a) i. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^5 = 1 \quad (*)$.
   ii. *Posons* $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. *Montrer que l'ensemble solution de l'équation* $(*)$ *est :* $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$
   iii. *Représenter* $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ *dans le plan complexe.*
   iv. *Calculer :* $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.

   (b) *On pose* $\alpha = \omega + \omega^4$ *et* $\beta = \omega^2 + \omega^3$.
   i. *Déduire de 1(a)iv que* α *et* β *sont solutions de* $Z^2 + Z - 1 = 0 \quad (**)$.
   ii. *Exprimer alors* α *en fonction de* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ *et* β *en fonction de* $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

   (c) *Résoudre l'équation* $(**)$ *et en déduire une valeur exacte de* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. (a) *On désigne par* A_0, A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *les points d'affixe respective* 1, ω, ω^2, ω^3 *et* ω^4.
   i. *Par quelle transformation simple passe-t-on de* A_0 *à* A_1 *? puis de* A_1 *à* A_2 *? Généraliser ce résultat.*
   ii. *Quelle est l'abscisse du point* H *intersection de la droite* (A_1A_4) *avec l'axe des abscisses ?*

   (b) *Soit* $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* Ω *d'affixe* $-\frac{1}{2}$ *et passant par le point* B *d'affixe* i. *On désigne par* M *et* N *les points où* $\mathscr{C}$ *rencontre l'axe des abscisses,* M *ayant une abscisse positive.*
   i. *Prouver que* M *a pour affixe* α *et que* N *a pour abscisse* β.
   ii. *Prouver que* H *est le milieu de* [OM].
   iii. *Déduire de ce qui précède la construction à la règle et au compas d'un pentagone dont on connaît le centre* O *et un sommet* A_0. *Effectuer cette construction en se plaçant dans un repère orthonormal direct* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *avec* $\vec{\imath} = \overrightarrow{OA_0}$.

Exercice G.8 : Propriété de l'angle au centre

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *on considère un cercle* $\mathscr{C}$ *de centre* Ω, *de rayon* $R > 0$ *et trois points* $A, B, M \in \mathscr{C}$. *Prouver la* ***propriété de l'angle au centre*** *:*

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \ [2\pi]$$

Exercice G.9 : Une caractérisation des triangles équilatéraux

Soient A, B *et* C *trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*

1. ABC *est un triangle équilatéral.*
2. *j ou j^2 est racine du polynôme* $P = aX^2 + bX + c$.

Exercice G.10

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}.$$

On pourra prouver cette propriété par trois méthodes différentes :

1. *Une méthode algébrique utilisant les propriétés du groupe $\mathbb{U}$.*
2. *Une méthode utilisant la factorisation par l'angle moitié.*
3. *Une méthode géométrique.*

Exercice G.11

Déterminer les points M du plan d'affixe z tels que :

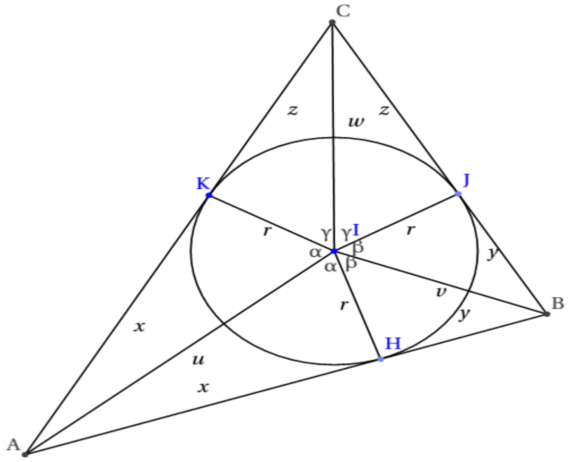
1. $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.
3. $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$.

Exercice G.12

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère un cercle de centre O sur lequel on place, dans le sens trigonométrique direct, 6 points distincts A, B, C, D, E et F de façon à ce que les triangles OAB, OCD et OEF soient équilatéraux. On note M, N et P les milieux respectifs de [BC], [DE] et [FA]. On veut montrer que MNP est équilatéral.

1. *Effectuer un dessin à la règle et au compas.*
2. *On note z, z' et z'' les affixes respectives de A, C et E. Donner les affixes z_B, z_D et z_F des points B, D et F en fonction de z, z' et z''.*
3. *Donner les affixes z_M, z_N et z_P des points M, N et P en fonction de z, z' et z''.*
4. *Conclure*

Exercice G.13



Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Les longueurs des côtés sont $a = y + z$, $b = z + x$ et $c = x + y$. On appelle s le demi-périmètre $x + y + z$. Les angles en I vérifient $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

1. *Démontrer que $r + ix = ue^{i\alpha}$.*
2. *Calculer $(r + ix)(r + iy)(r + iz)$.*
3. *En prenant les parties imaginaires, démontrer que $xyz = r^2(x + y + z)$.*
4. *En déduire que $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.*
5. *Démontrer que l'aire du triangle ABC vaut*
   $\mathscr{A} = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ *(Formule de Heron)*

TRANSFORMATIONS DU PLAN COMPLEXE

Exercice T.1

Identifier les transformations complexes suivantes :

1. $f_1 : z \mapsto z + 1 + i$.
2. $f_2 : z \mapsto e^{i\pi/6} z$.
3. $f_3 : z \mapsto e^{i\pi/3} z + 1$.
4. $f_4 : z \mapsto 2z + 1 - i$.
5. $f_5 : z \mapsto -z + 2 - i$.
6. $f_6 : z \mapsto \bar{z}$.
7. $f_7 : z \mapsto (1+i) z + i$.
8. $f_8 : z \mapsto \left(1 + i\sqrt{3}\right) z + 1$.

Exercice T.2

Donner les applications qui représente dans le plan complexe les transformations suivantes :

1. *La translation de vecteur d'affixe* $-2 + i$.
2. *La symétrie de centre* i.
3. *La rotation d'angle* $\pi/6$ *et de centre* 1.
4. *L'homothétie de rapport* 3 *et de centre* $1 + 2i$.
5. *La similitude de rapport* 2*, d'angle* $\pi/3$ *et de centre* $1 + i$.

Exercice T.3

On considère :

- *le point* Ω *du plan complexe d'affixe* $1 + 2i$
- *l'homothétie* h *de centre* Ω *et de rapport* 2.
- *la rotation* r *de centre* Ω *et d'angle* $\pi/4$.
- *la transformation du plan complexe* $s = r \circ h$.

Donner l'écriture complexe de s.

Exercice T.4

Étudier la similitude s *qui envoie le point* A *d'affixe* i *sur le point* A′ *d'affixe* $1 + \sqrt{3}/2 + i/2$ *et le point* B *d'affixe* $1 + i$ *sur le point* B′ *d'affixe* $1 + 3\sqrt{3} + 2i$.

Exercice T.5

Démontrer que :

1. *la composée de deux symétries centrales est une translation.*
2. *la composée d'une rotation et d'une translation est une rotation.*
3. *la composée de deux rotations est une rotation ou une translation.*