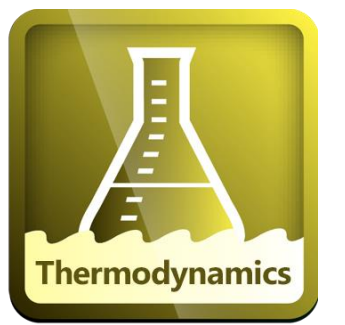




André Talla, Ing./Ph.D



Thermodynamique appliquée

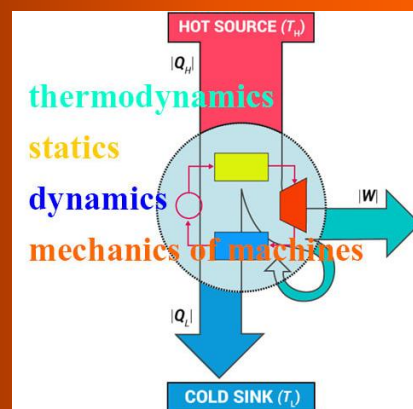
Module 4

Diagrammes de Mollier $h(s)$ et diagramme $\log p(h)$

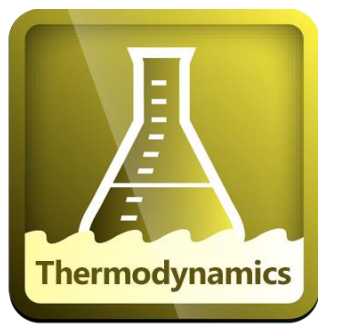


Richard Mollier, 1863 - 1935

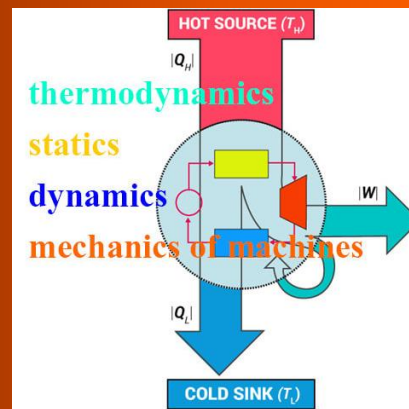
André Talla, Ing. / Ph.D, Enseignant-Chercheur, Yaoundé - Cameroun



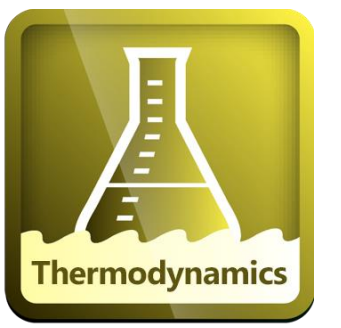
Bienvenue



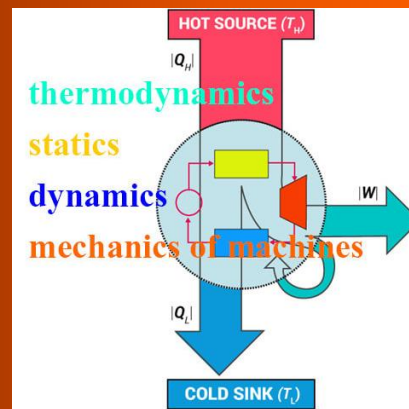
André Talla, Ing./Ph.D



Présentation du module

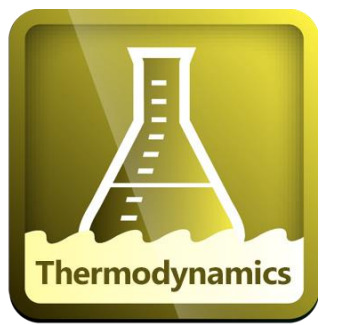


André Talla, Ing./Ph.D



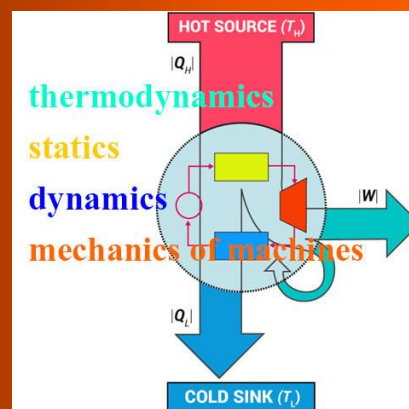
- Diagramme de Mollier $h(s)$
- Diagramme LOG $p(h)$

Diagramme de Mollier $h(s)$ - principe



André Talla, Ing./Ph.D

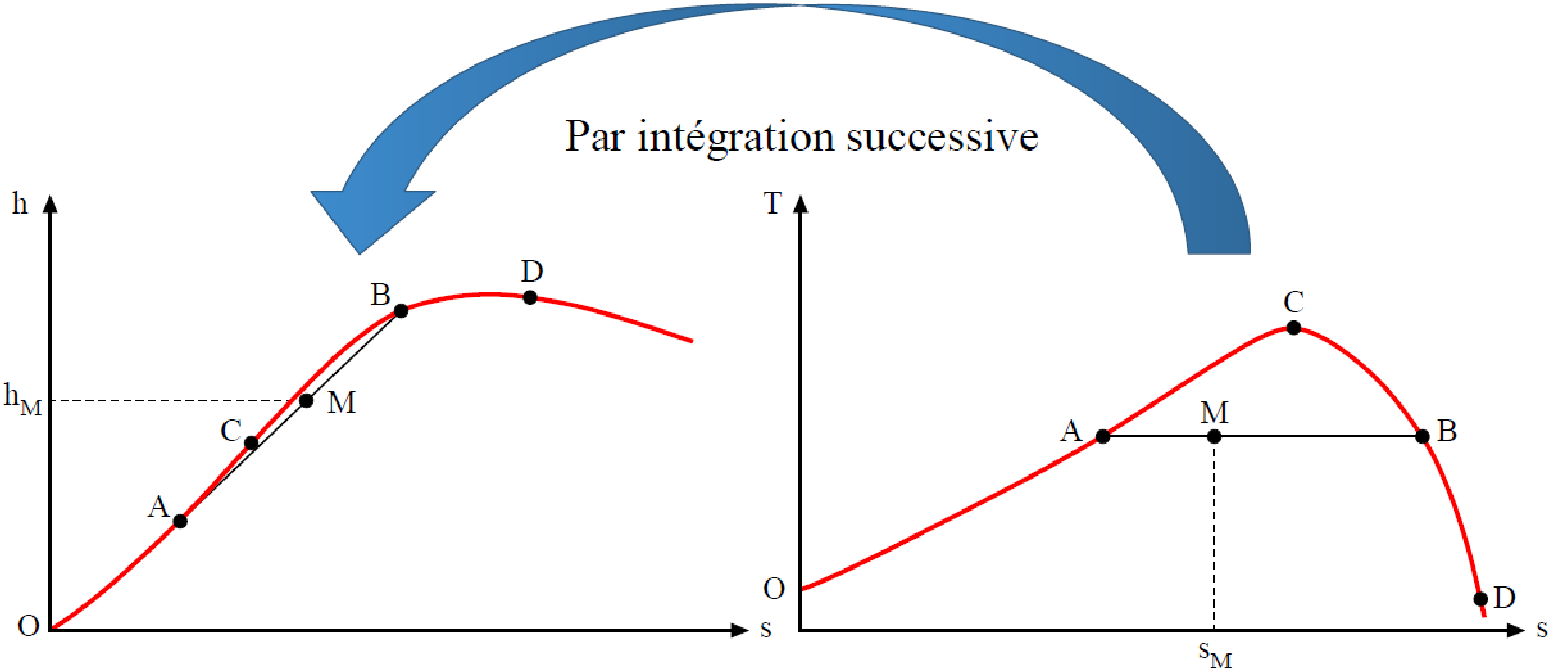
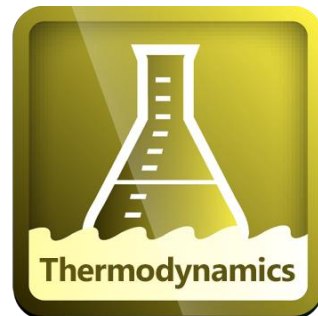
- Diagramme utilisé pour le calcul des grandeurs thermodynamiques intervenant dans les projets (Q , W , etc.)
- Comporte l'enthalpie spécifique en ordonnée et l'entropie spécifique en abscisse
- Fonction enthalpie: $h = u + pv$
Soit $dh = \delta Q + v dp$
- Fonction entropie: $ds = \frac{\delta Q}{T}$
d'où $dh = T ds + v dp$
- Si $p=const$ et $h_o=0$ par convention, alors par intégration:
$$h_M = \int_{S_0}^{S_M} T ds$$
- Diagramme de MOLLIER $h(s)$ déduit du diagramme entropique $T(s)$ par intégration successive





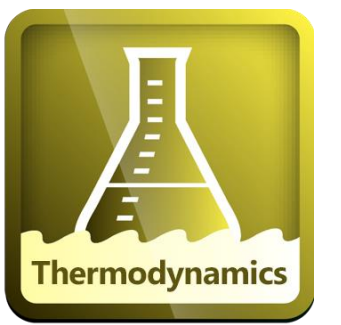
André Talla, Ing./Ph.D

Diagramme de Mollier $h(s)$



Courbe de saturation diagramme $h(s)$: image par la même application de la courbe de saturation du diagramme $T(s)$ (voir positions des points A, B, C et D)

Diagramme de Mollier $h(s)$ – Isobares

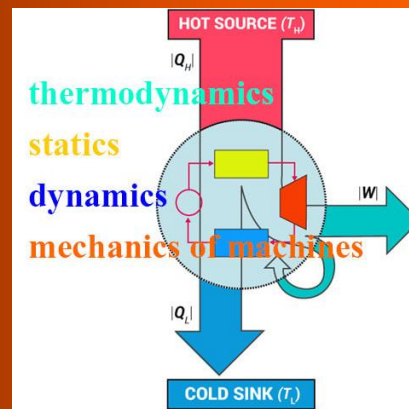


André Talla, Ing./Ph.D

- Pente d'une isobare :

$$\left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_P = T$$

Pente d'une isobare = T en
diagramme $h(s)$



Preuve

- Expression différentiée de l'enthalpie :

$$dh = T ds + v dp$$

- Transformation isobare :

- D'où $p = \text{const}$

$$dh = \delta Q = T ds$$

- Finalement

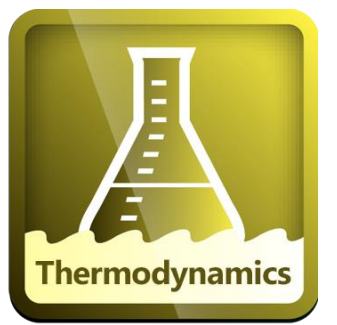
$$\left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_P = T$$

André Talla, Ing./Ph.D



André Talla, Ing./Ph.D

Diagramme de Mollier $h(s)$ – Isobares



- Zone liquide : compression isentropique du liquide
d'où $\Delta h \cong v_0(p - p_0)$

 h varie peu quand on passe d'une isobare à l'autre par compression isentropique d'un liquide

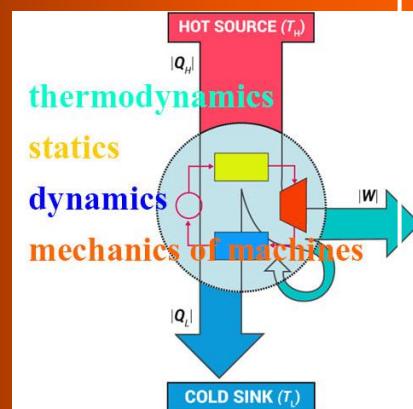
Donc isobares $\sim$ confondues avec la branche OC de la courbe de saturation (voir graphe précédent)

Justification

Pour l'eau : $v_0 \cong 0,001 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$

Si $p - p_0 = 100 \text{ bars}$

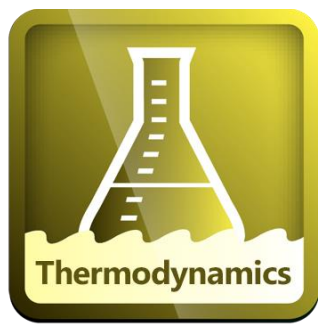
on a $\Delta h = 10 \text{ kJ kg}^{-1}$ très faible devant les variations d'enthalpie mise en jeu dans les autres transformations



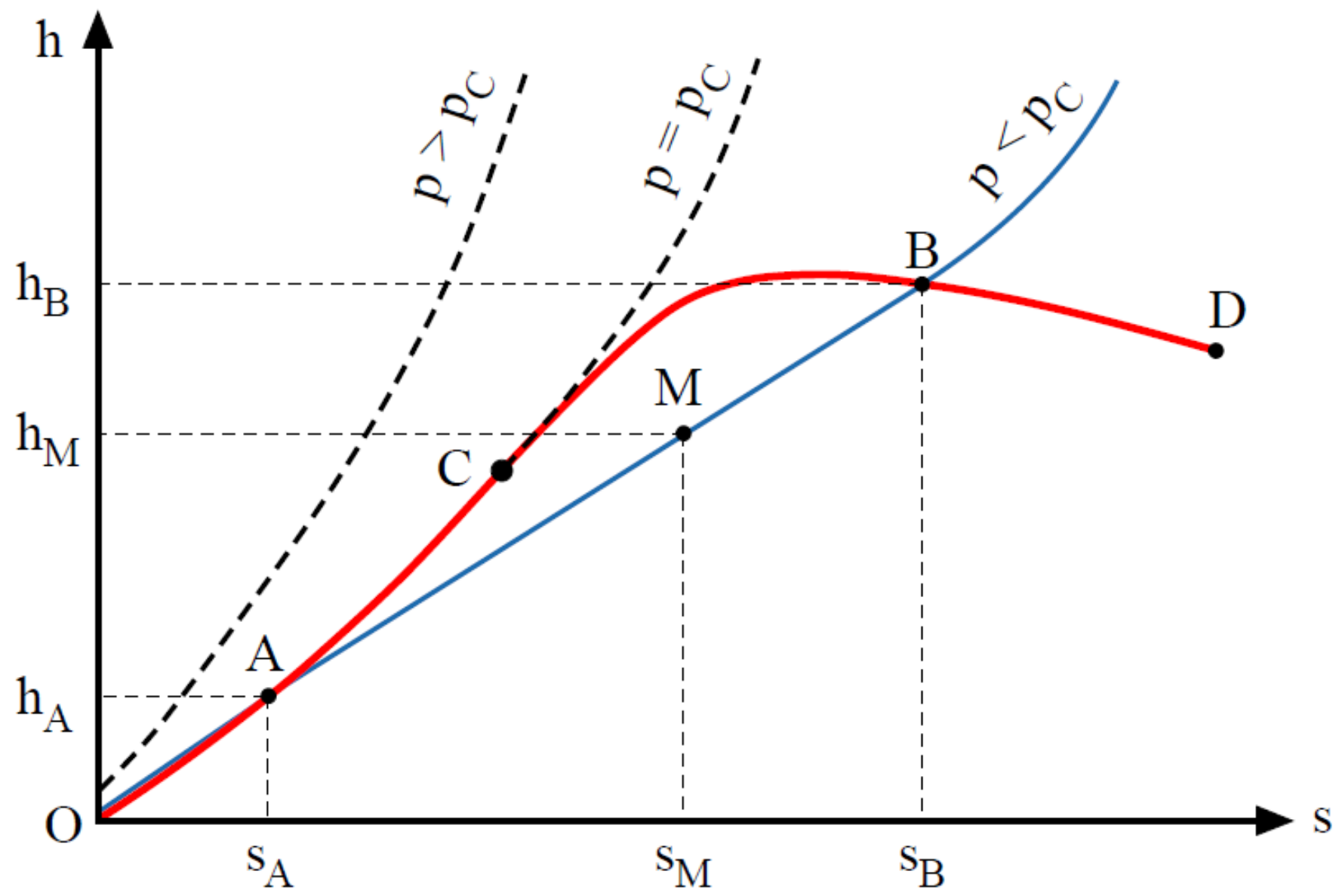
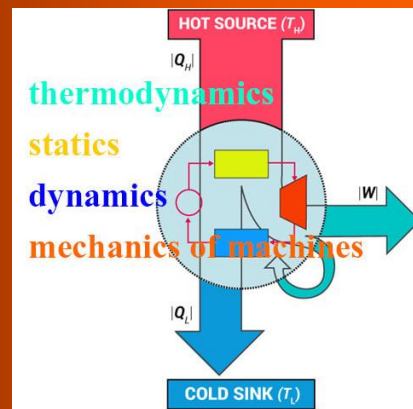


André Talla, Ing./Ph.D

Diagramme de Mollier $h(s)$ – Isobares



- Intérieur de la courbe de saturation ACB :
Isobare = segment de droite AB de pente T



Preuve

- Transformation isobare

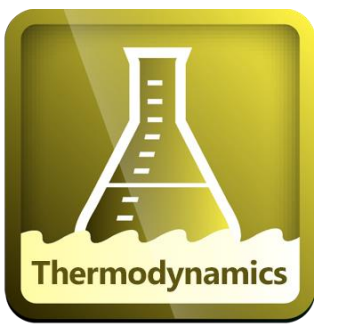
$$\left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_P = T$$

- Etat diphasique :
Transformation isobare

$$T = \text{const}$$

- Finalement $h = T s$
(équation d'une droite)

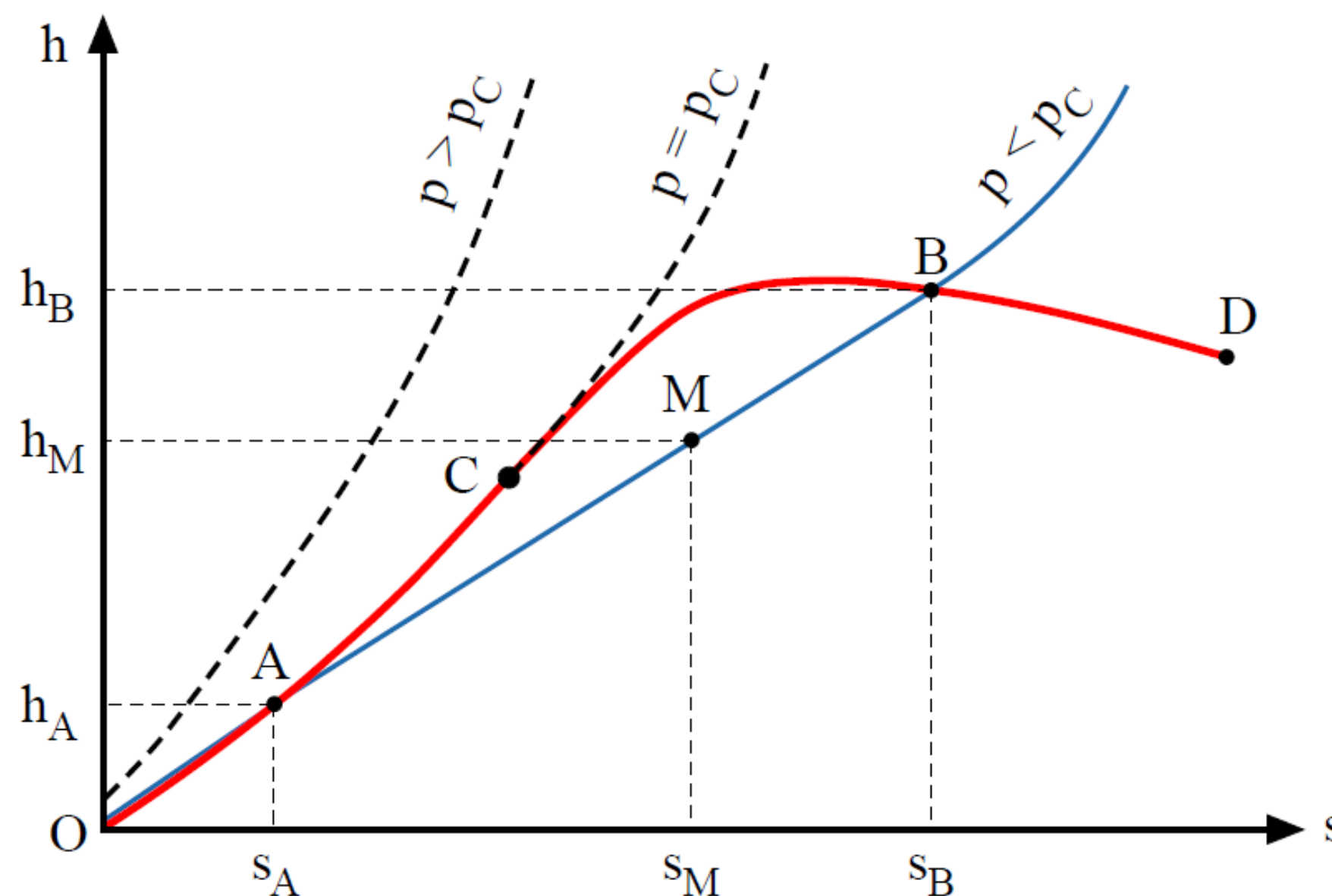
Diagramme de Mollier $h(s)$ – Isobares



André Talla, Ing./Ph.D

- **Zone vapeur sèche :**
Isobare approximée à celle d'un gaz parfait de forme exponentielle

$$h = K' e^{\left(\frac{s}{c_p}\right)}$$



Démonstration

- Expression différentiée de l'entropie :

$$ds = \frac{\delta Q_p}{T} = \frac{C_p dT}{T}$$

- Hypothèse : C_p indépendant de T
- On a donc :

$$\left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_P = T \quad \text{et} \quad T = K e^{\left(\frac{s}{c_p}\right)}$$

- Finalement : $h = K' e^{\left(\frac{s}{c_p}\right)}$

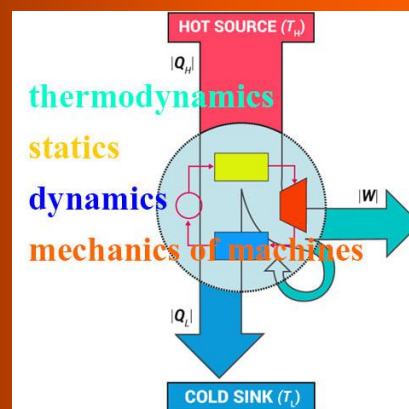
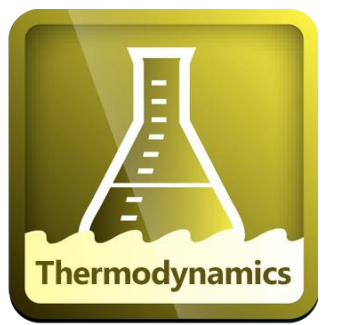
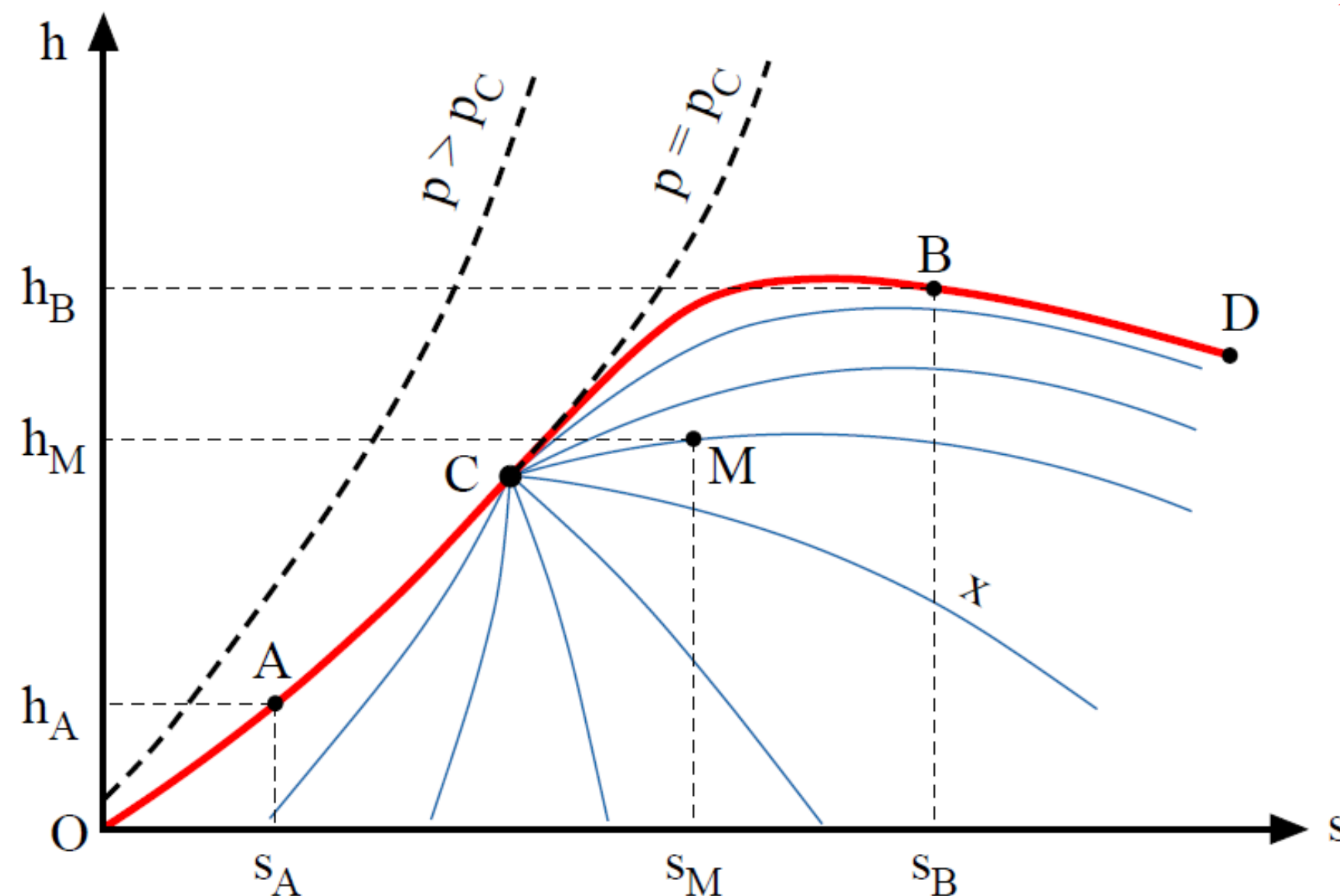


Diagramme de Mollier h(s) – Titre de vapeur



André Talla, Ing./Ph.D

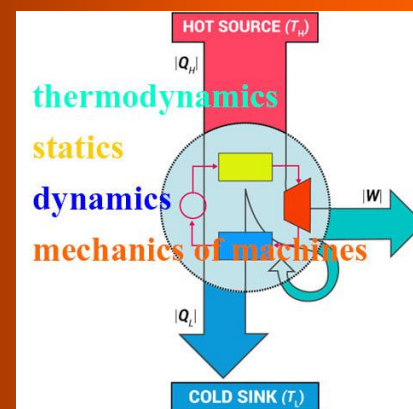


Définition :

$x = \frac{m_v}{m}$ où m_v est la masse de vapeur et m la masse du mélange

On montre que $x = \frac{s_M - s_A}{s_B - s_A}$ et $x = \frac{h_M - h_A}{h_B - h_A}$

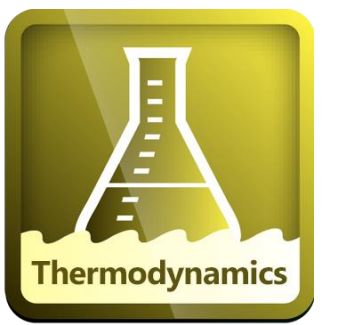
Courbes d'égale titre = faisceau de courbes convergeant au point critique C où le titre est indéfini



André Talla, Ing./Ph.D

Année 2019/2020

Diagramme de Mollier $h(s)$ – Titre de vapeur



André Talla, Ing./Ph.D

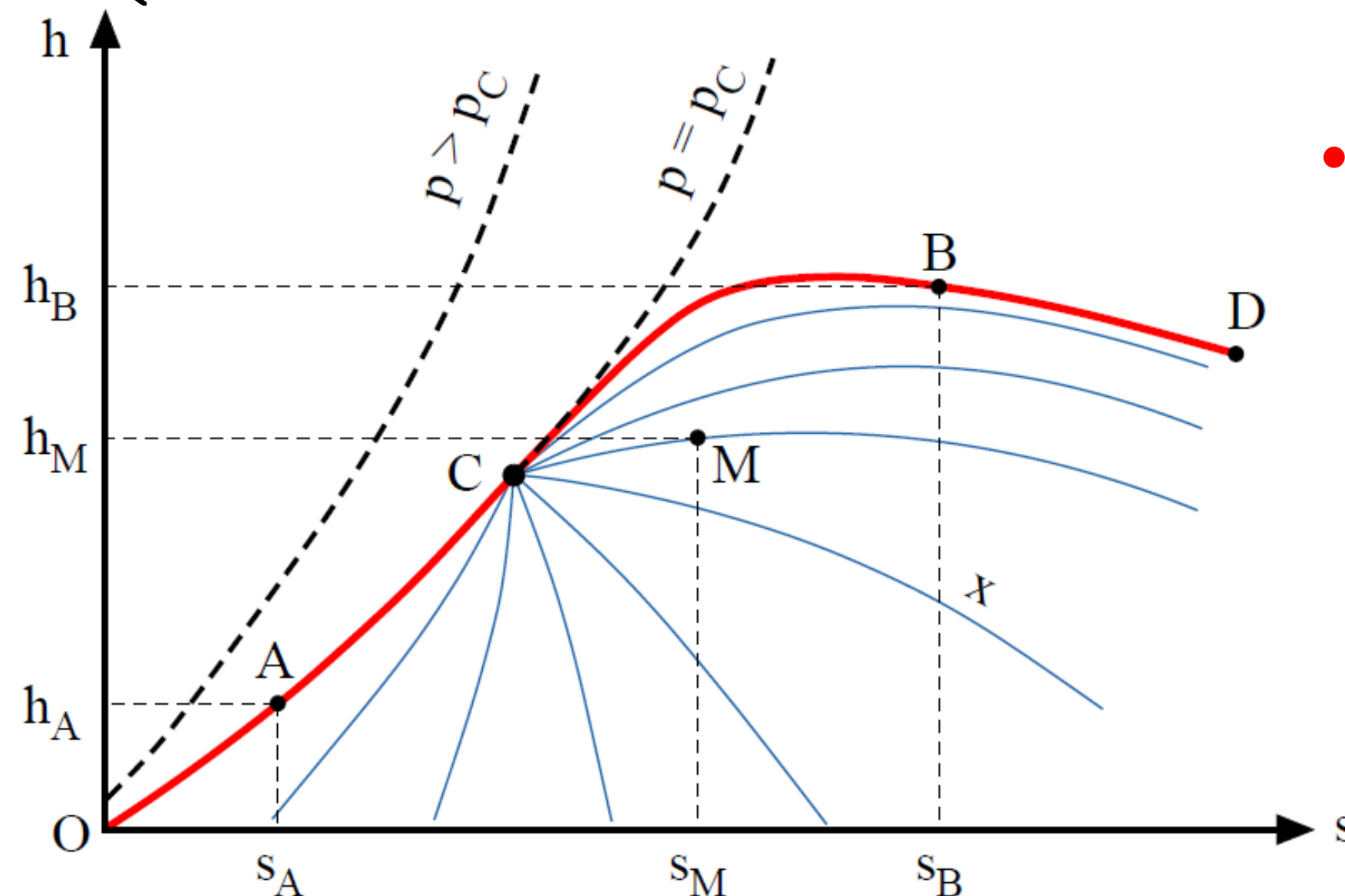
Démonstration

- On a le système d'équations :

$$\begin{cases} ms = m_v s_B + m_l s_A \\ mh = m_v h_B + m_l h_A \\ m = m_v + m_l \end{cases}$$

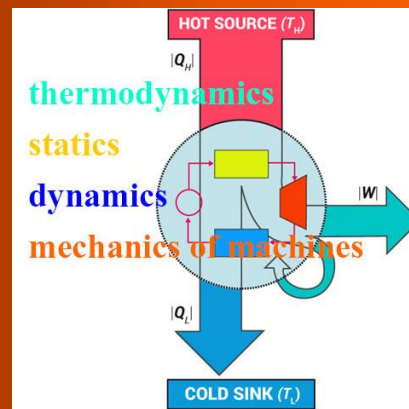
- La résolution du système donne :

$$\begin{cases} m_v = m \frac{s_M - s_A}{s_B - s_A} \\ m_l = m \frac{s_B - s_M}{s_B - s_A} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m_v = m \frac{h_M - h_A}{h_B - h_A} \\ m_l = m \frac{h_B - h_M}{h_B - h_A} \end{cases}$$



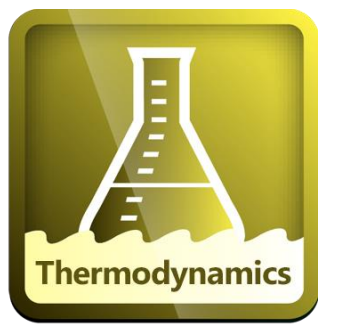
- Finalement :

$$x = \frac{s_M - s_A}{s_B - s_A} \quad \text{et} \quad x = \frac{h_M - h_A}{h_B - h_A}$$



André Talla, Ing./Ph.D

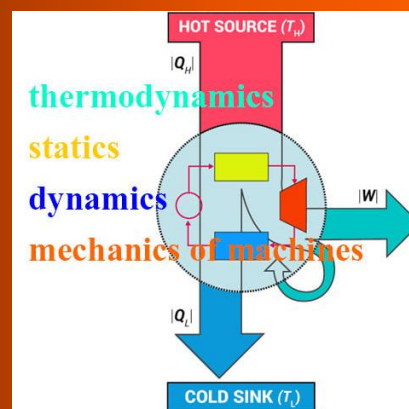
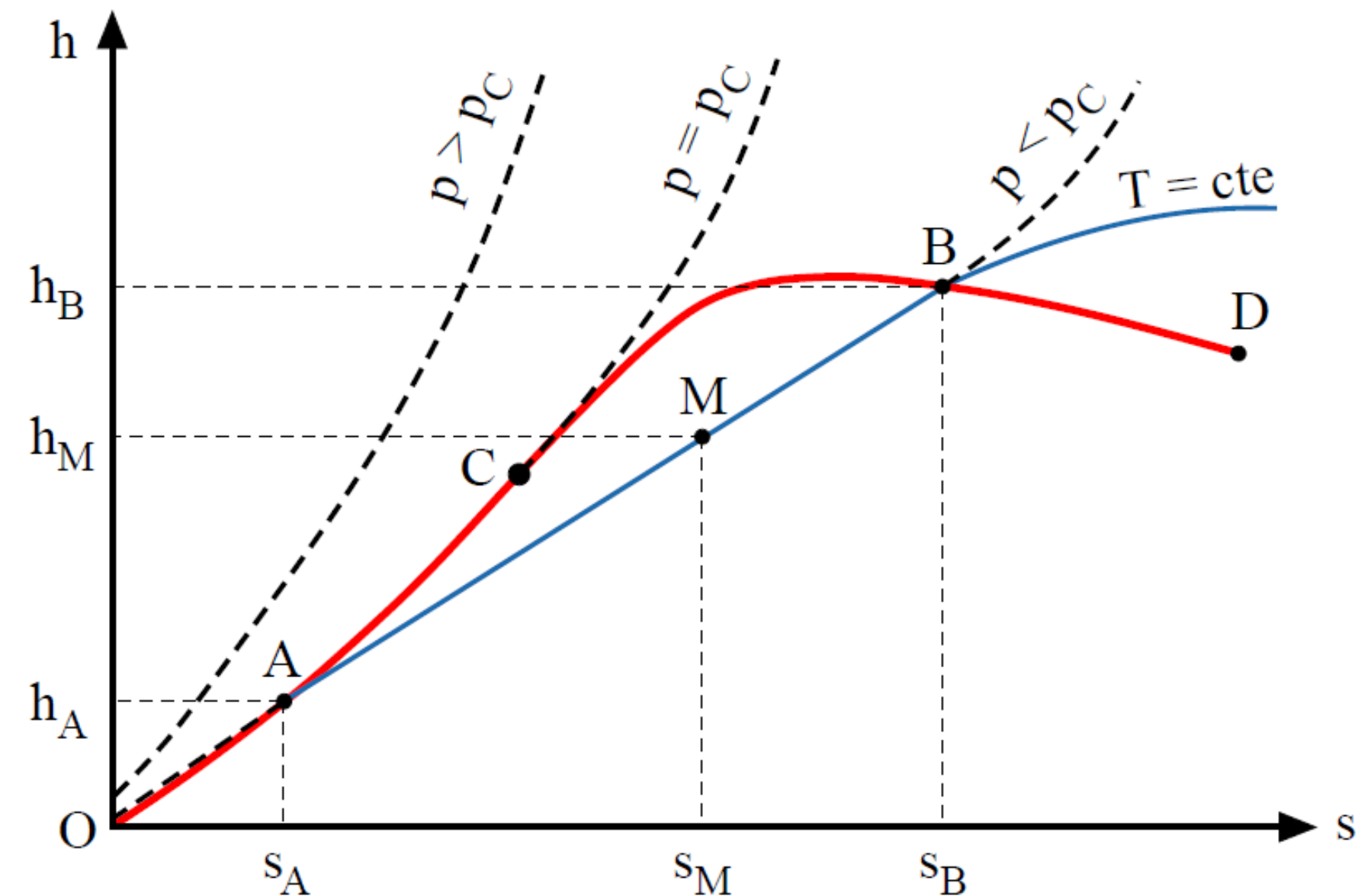
Diagramme de Mollier $h(s)$ - Isothermes



André Talla, Ing./Ph.D

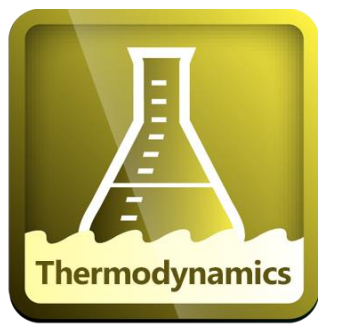
- **Zone mixte** : Isobares et isothermes rigoureusement confondues

Le changement d'état liquide-vapeur se fait à pression et température constantes



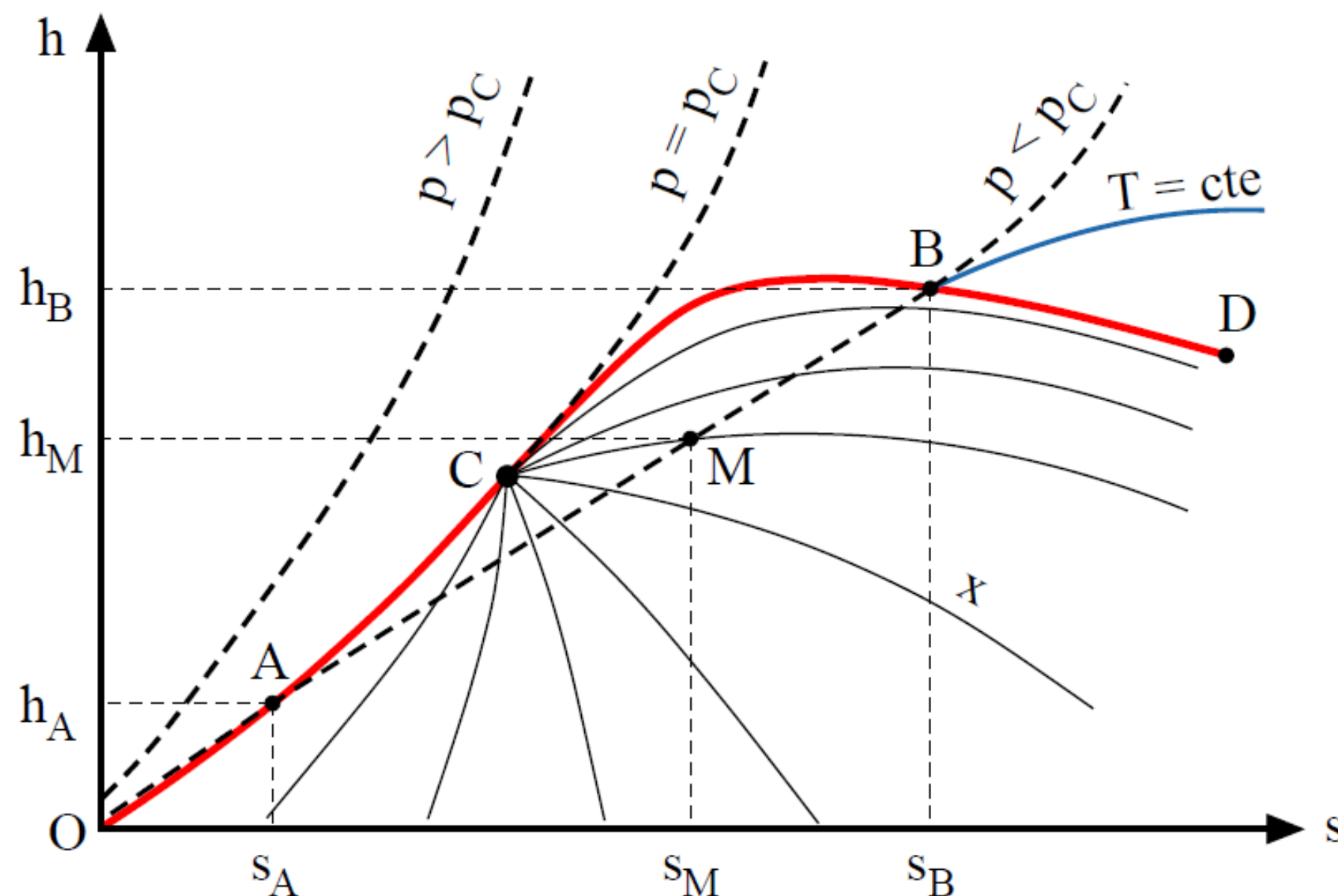
André Talla, Ing./Ph.D

Diagramme de Mollier $h(s)$ - Isothermes



André Talla, Ing./Ph.D

- **Zone vapeur sèche** : isothermes tendent vers l'horizontale loin de la courbe de saturation (propriétés des gaz parfaits)



Preuve

- Expression fonction enthalpie :
- Transformation gaz parfait d'un état à

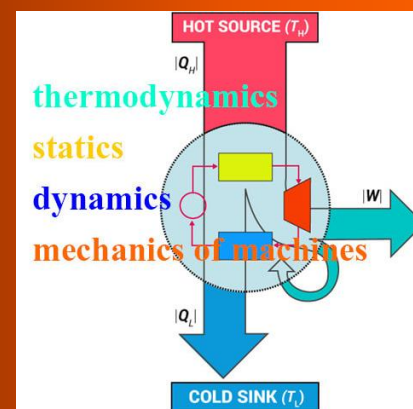
$$h = u + pv \quad \text{et} \quad dh = du + d(pv)$$

$$\text{avec } du_{\text{isochore}} = c_v dT \quad \text{et} \quad du_{\text{isotherme}} = 0$$

$$\text{d'où } dh = c_v dT + \frac{R}{M} dT = \left(c_v + \frac{R}{M} \right) dT$$

$$\text{puis } dT = 0$$

$$\text{donc } h = \text{const}$$





André Talla, Ing./Ph.D

Diagramme de Mollier $h(s)$

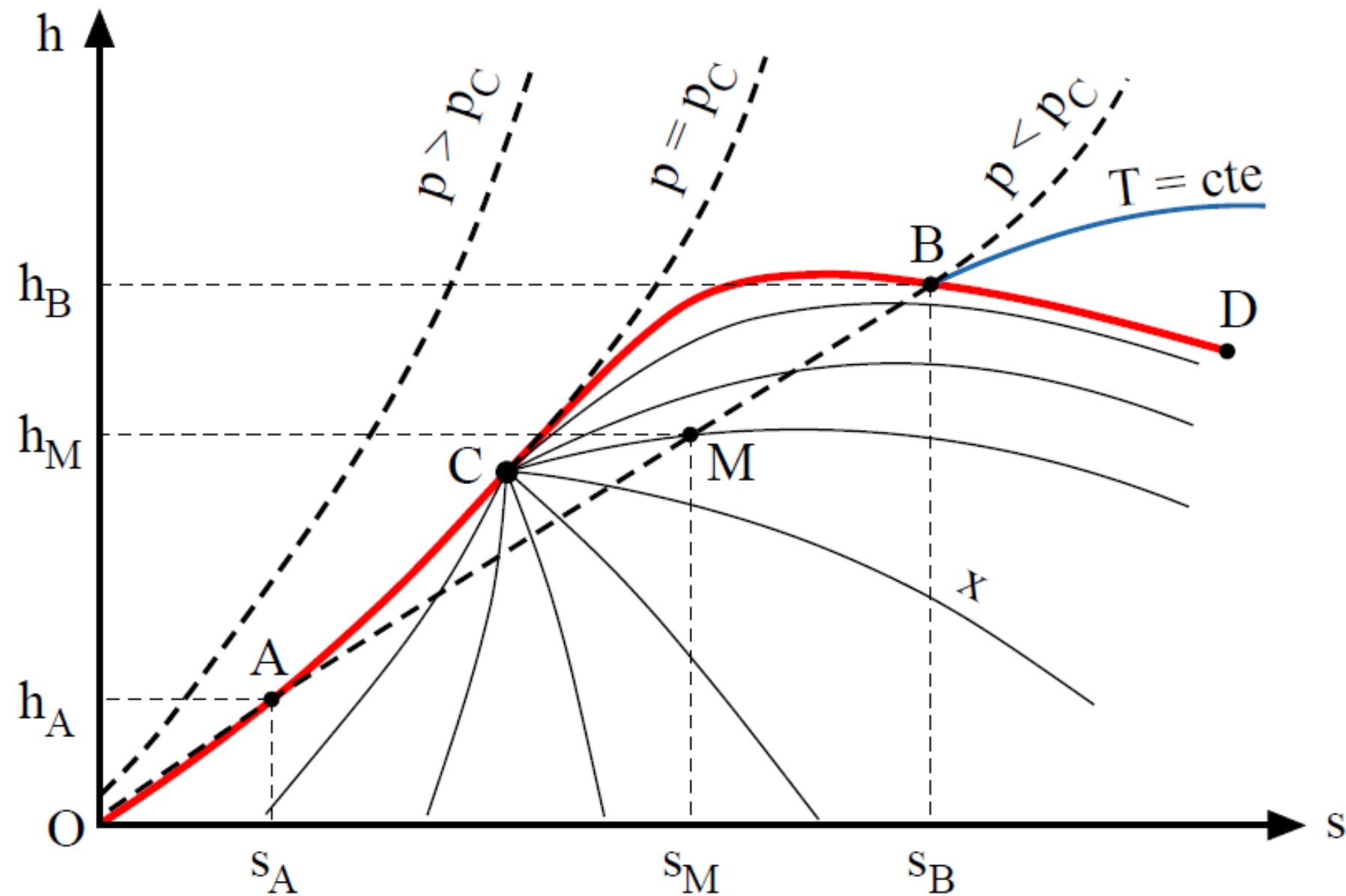
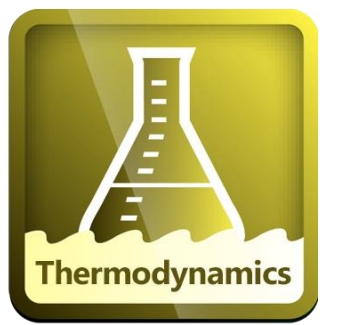
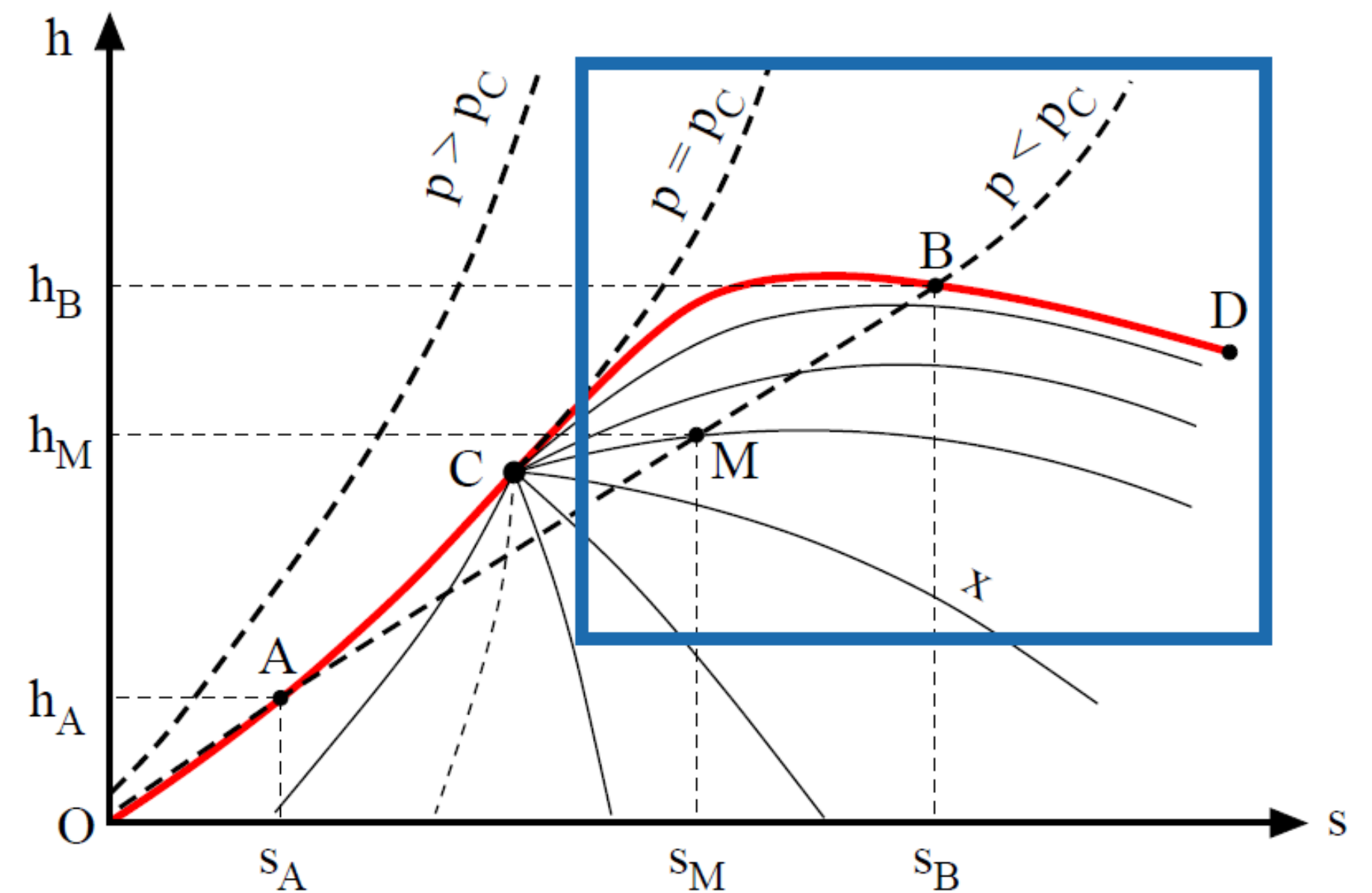
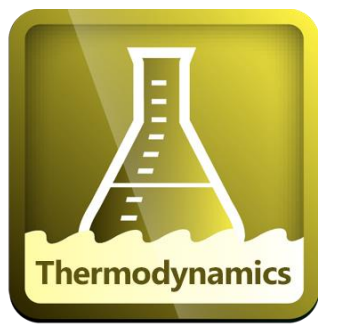


Diagramme de MOLLIER de la vapeur d'eau avec toutes les courbes décrites ci-dessus



Utilisation diagramme que pour la vapeur sèche ou saturante à titre élevé

Diagramme de Mollier $h(s)$



André Talla, Ing./Ph.D

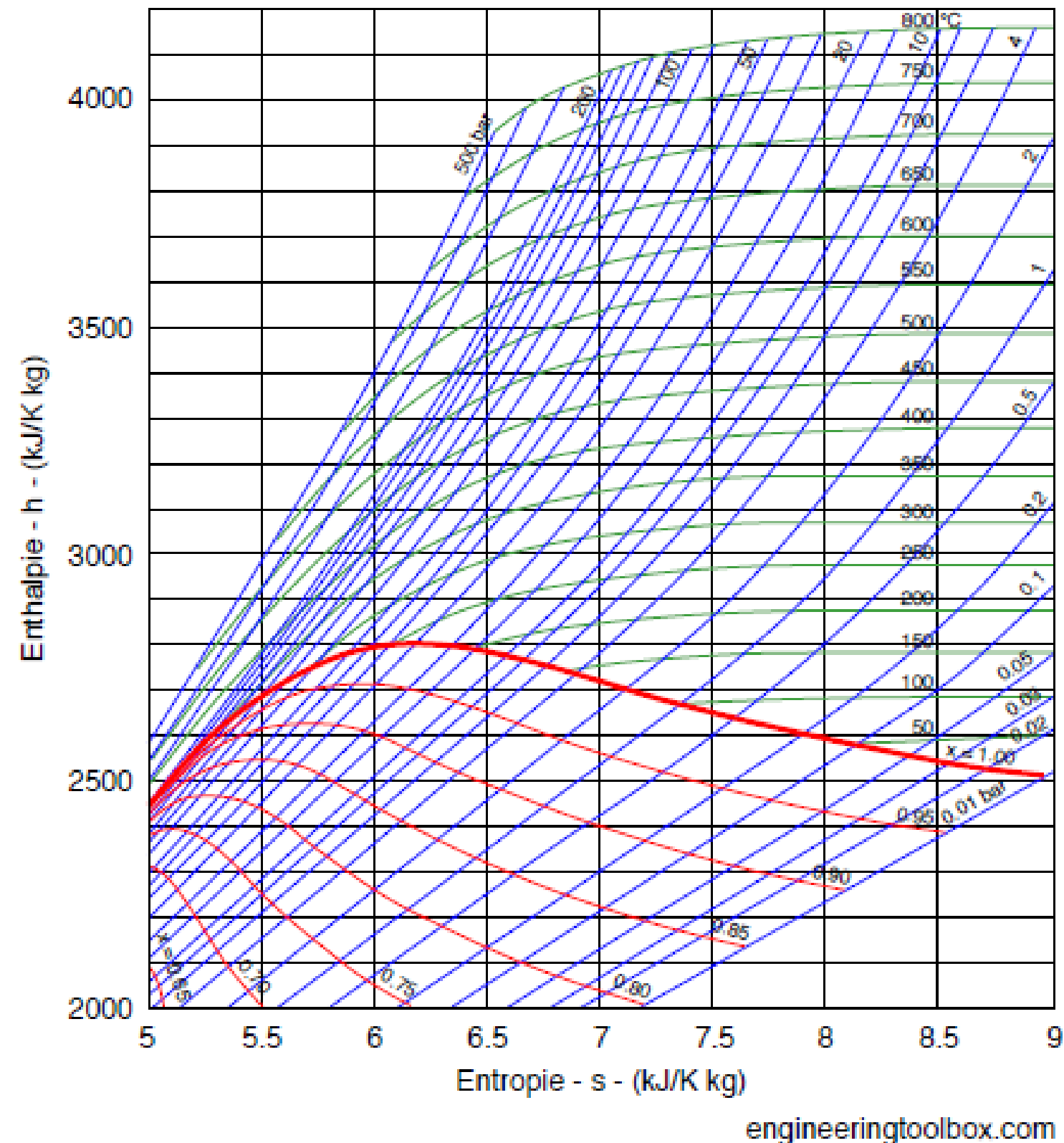


Diagramme industriel de Mollier
pour la vapeur d'eau

Remarques

- Courbes de volumes spécifiques représentées sur certains diagrammes : utiles dans le dimensionnement des appareils et tuyauteries (détermination du débit volume)
- Diagramme de MOLLIER inexploitable dans la zone liquide ou même liquide - vapeur à titre faible : détermination des fonctions h , s ; T_e , P_s à l'aide des tables thermodynamiques.

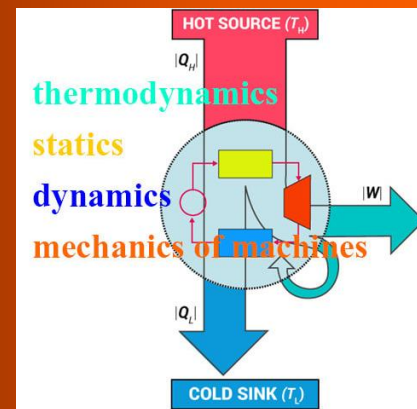
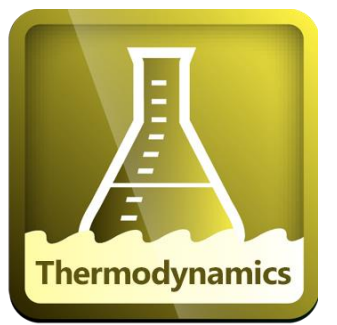
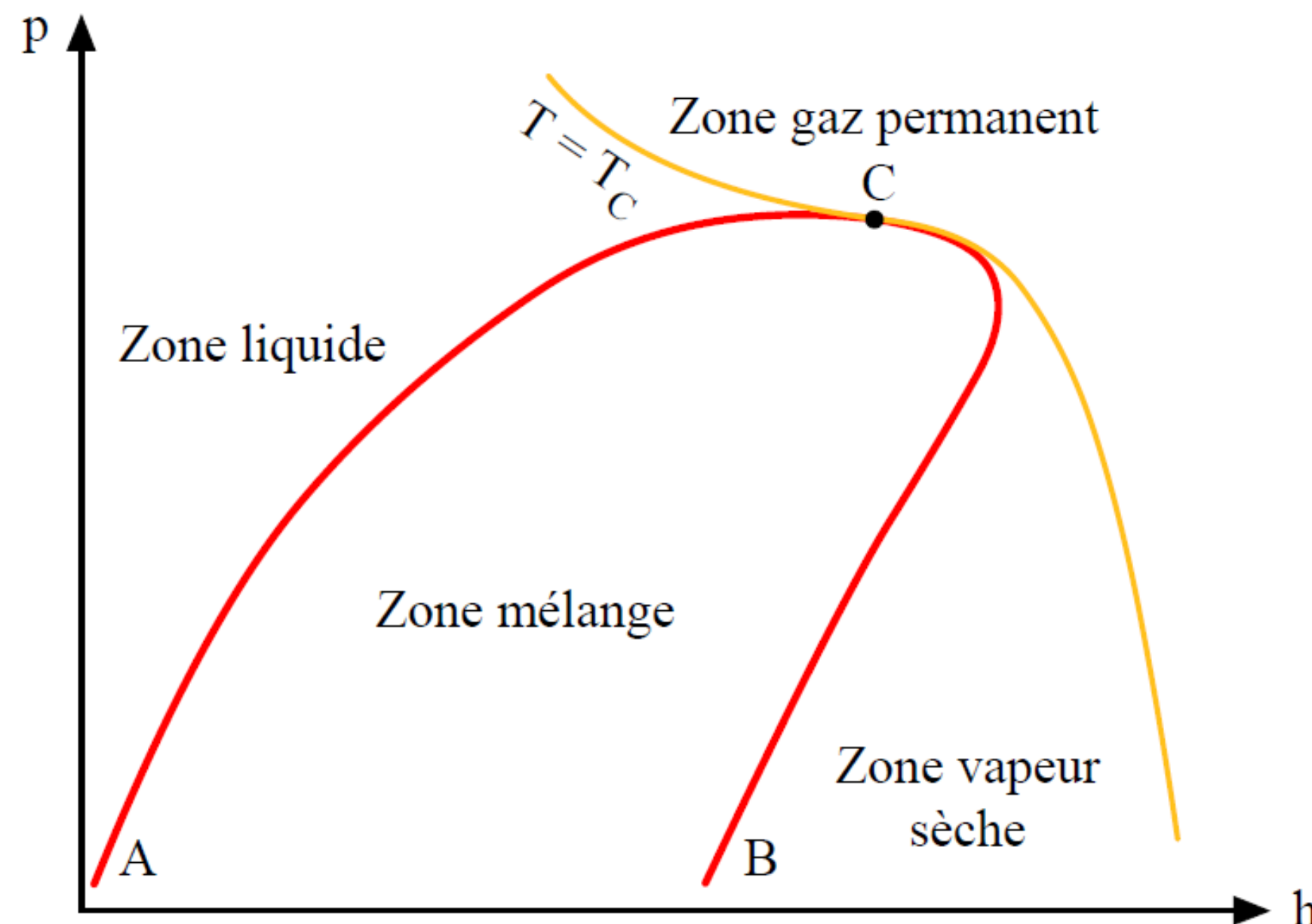


Diagramme LOG p (h)



André Talla, Ing./Ph.D

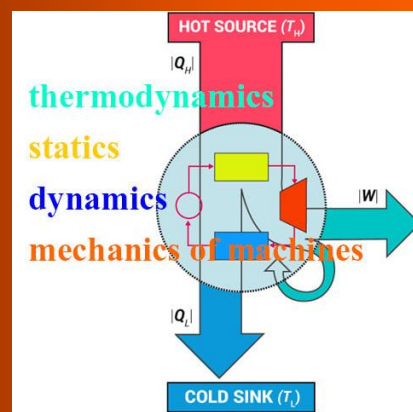
- Diagramme des frigoristes
- Comporte la pression sur une échelle semi-logarithmique en ordonnée et l'enthalpie spécifique en abscisse



- **Courbe de saturation ACB et isotherme T_c**

Partagent le plan en quatre zones correspondant aux états :

- liquide,
- liquide-vapeur,
- vapeur sèche (ou gaz) et
- gaz permanent.

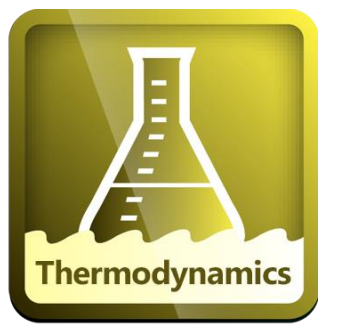


André Talla, Ing./Ph.D



André Talla, Ing./Ph.D

Diagramme LOG p (h) - Isothermes



- **Zone liquide** : Isenthalpes et isothermes pratiquement confondues
- **Zone mixte** : Isobares et isothermes rigoureusement confondues

➤ Justification isotherme zone liquide

Pour un liquide, h varie très peu avec la pression et h ne dépend que de la température.

➤ Justification isotherme zone mixte

Le changement d'état liquide – vapeur s'opère à pression et température constantes

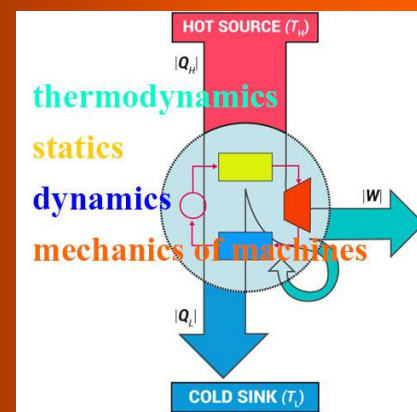
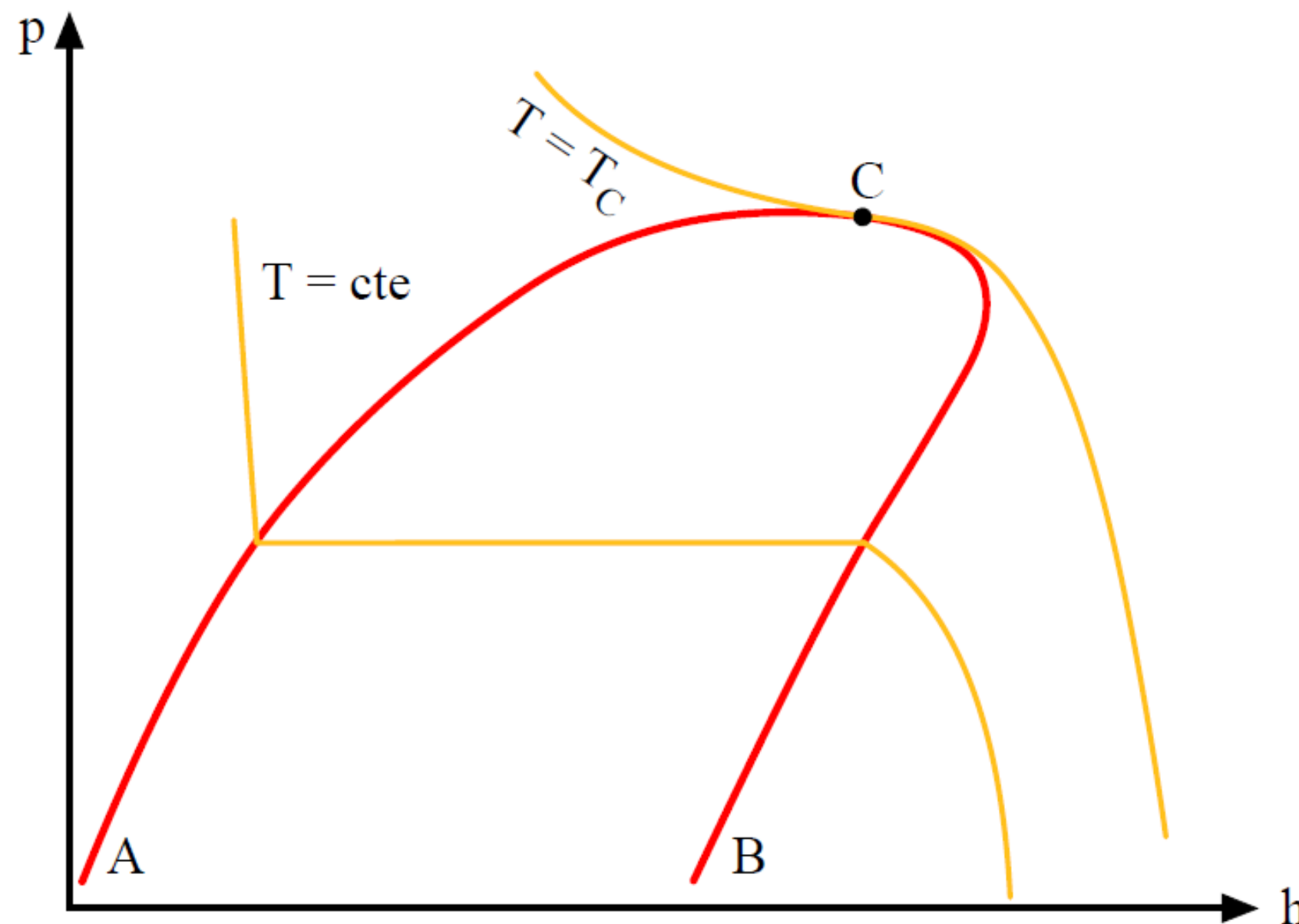
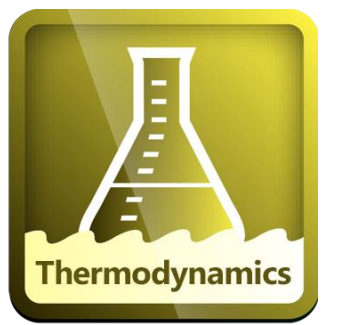


Diagramme LOG p (h) - Isothermes



André Talla, Ing./Ph.D

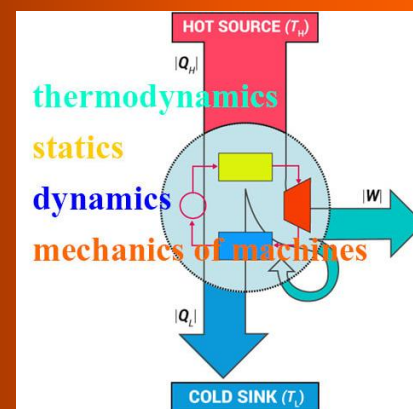
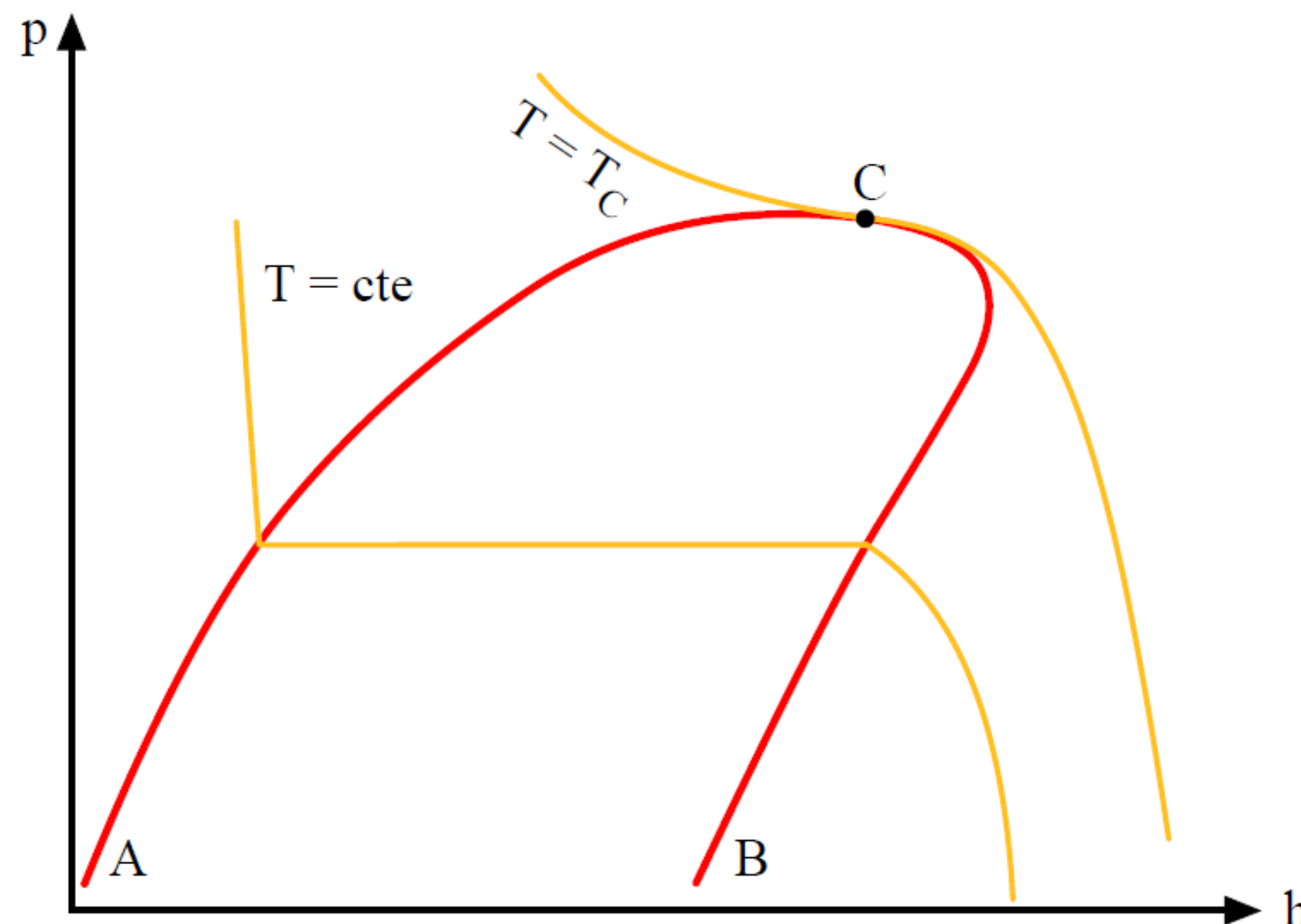
- **Zone vapeur sèche** : isothermes tendent vers la verticale loin de la courbe de saturation (propriétés des gaz parfaits)

Justification

- Quand p tend vers 0, on a un gaz parfait
- Comme précédemment démontré dans le cas du diagramme de Mollier, nous avons alors :

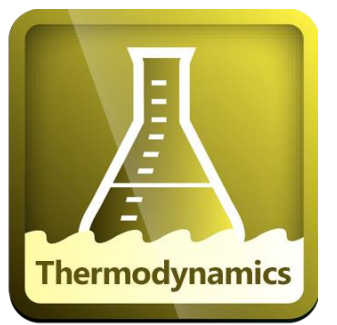
$$dh = \left(c_v + \frac{R}{M} \right) dT = 0 \text{ car } T = \text{const}$$

Donc $h = \text{const}$ loin de la courbe de saturation



André Talla, Ing./Ph.D

Diagramme LOG p (h)-Isentropes



André Talla, Ing./Ph.D

- **Zone liquide : Isentropes presque verticales**

- **Preuve**

La relation $dh = Tds + vdp$ donne :

$$\left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_s = v \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial p}{\partial h} \right|_s = \frac{1}{v}$$

v est faible pour le liquide et donc $1/v$ élevé, d'où la forme verticale de l'isotrope

Pour un liquide, h varie très peu avec la pression

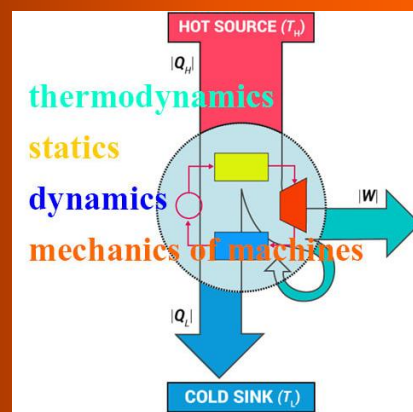
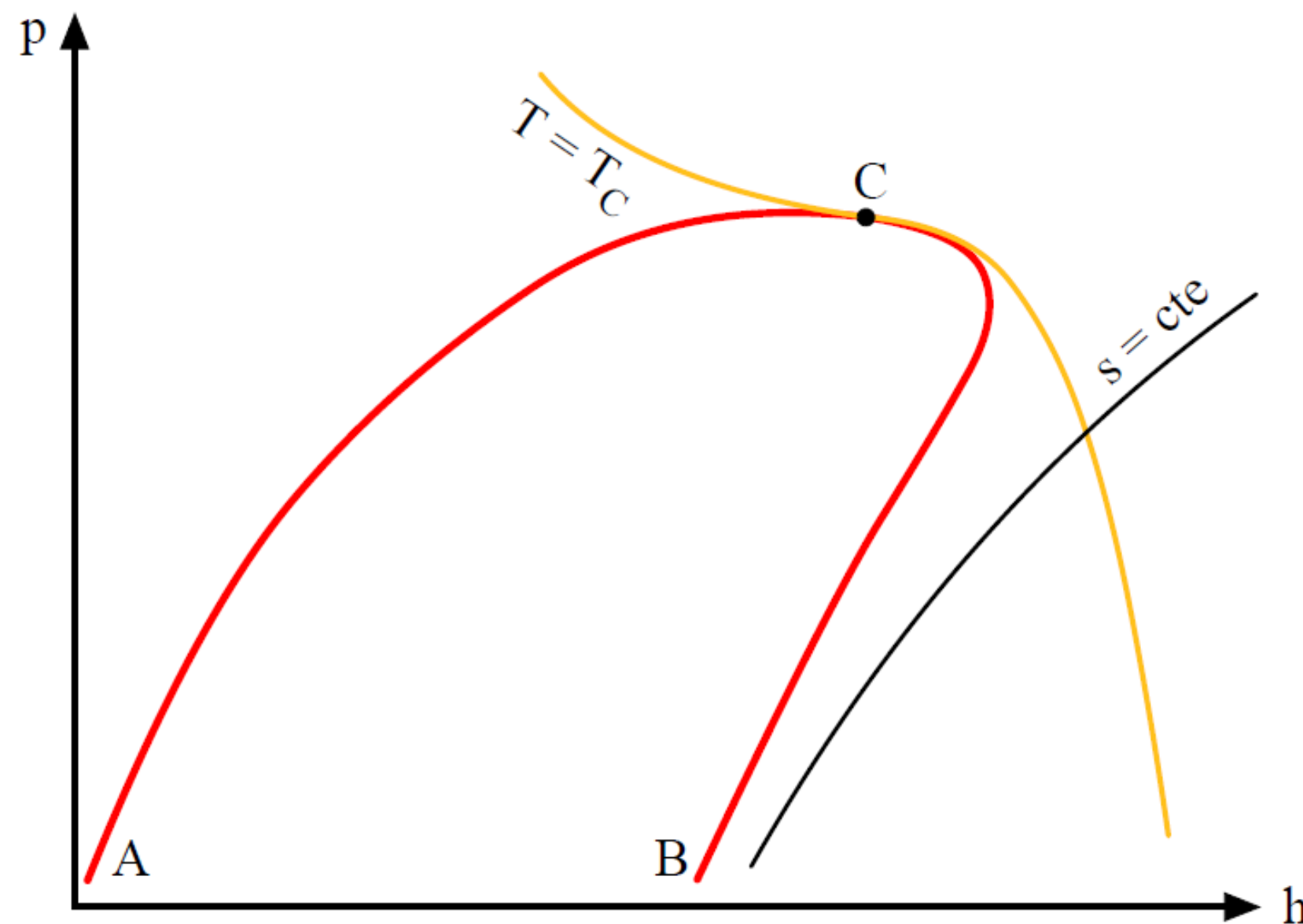
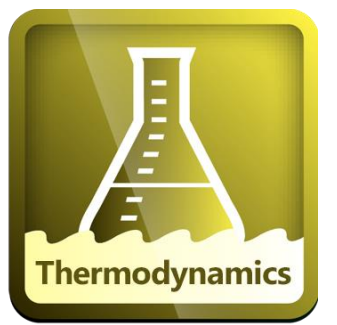


Diagramme LOG p (h)-Isentropes

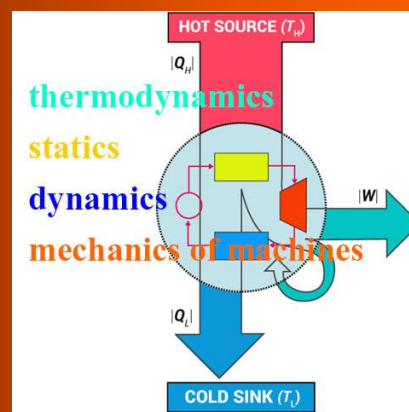
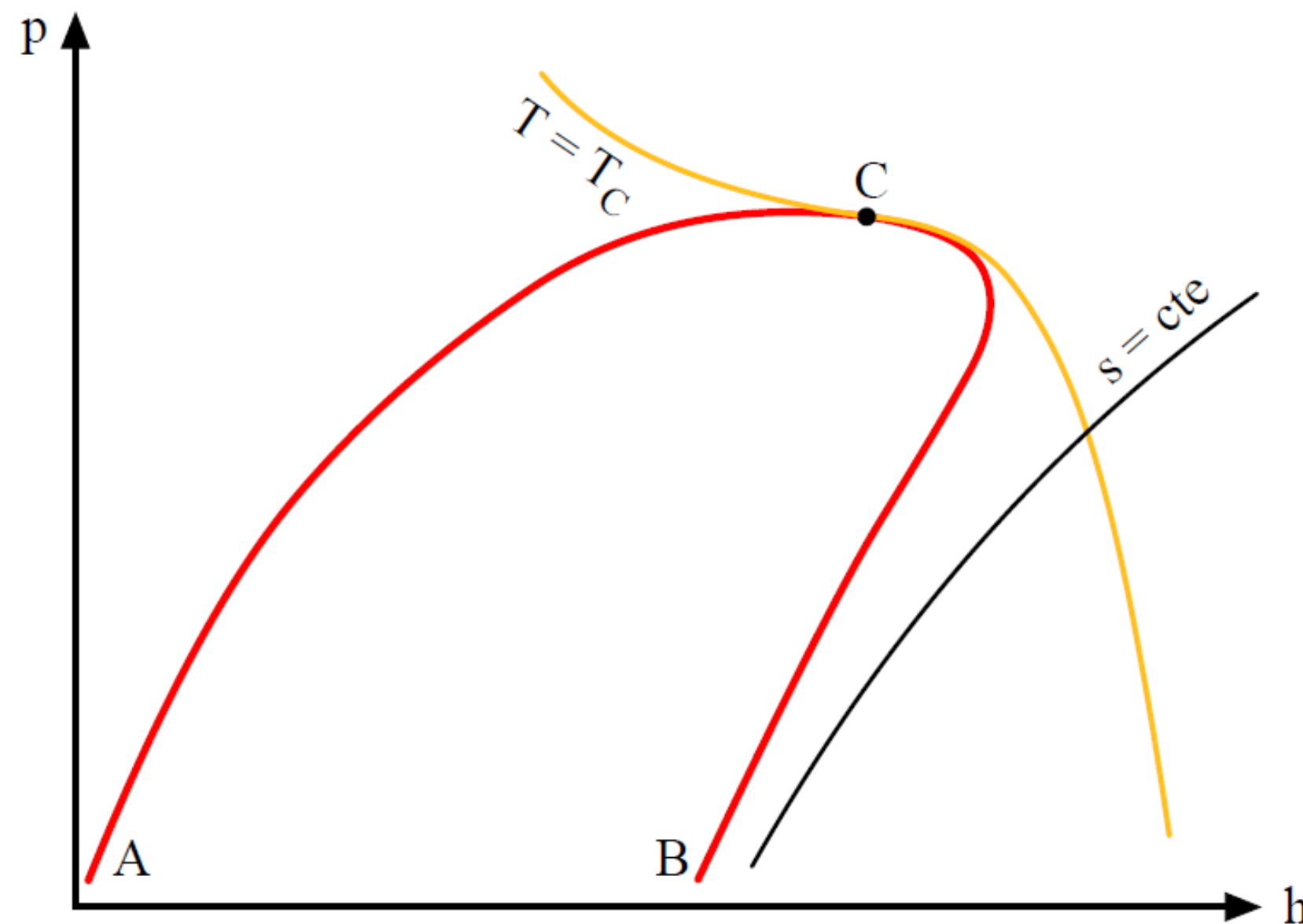


André Talla, Ing./Ph.D

- **Zone vapeur sèche :**
Isentropes sous forme
curviligne

- **Preuve**

est élevé pour la vapeur et
donc $1/v$ faible, d'où la forme
curviligne de l'isotrope



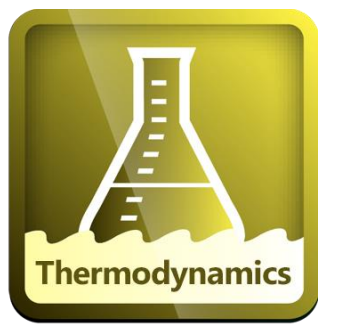
André Talla, Ing./Ph.D

Année 2019/2020



André Talla, Ing./Ph.D

Diagramme LOG p (h)- Isovolumes



- **Zone liquide** : presque verticaux

- **Justification**

Pour un liquide, comme h, v varie très peu avec la pression.

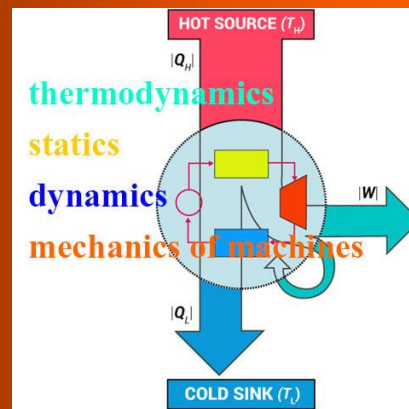
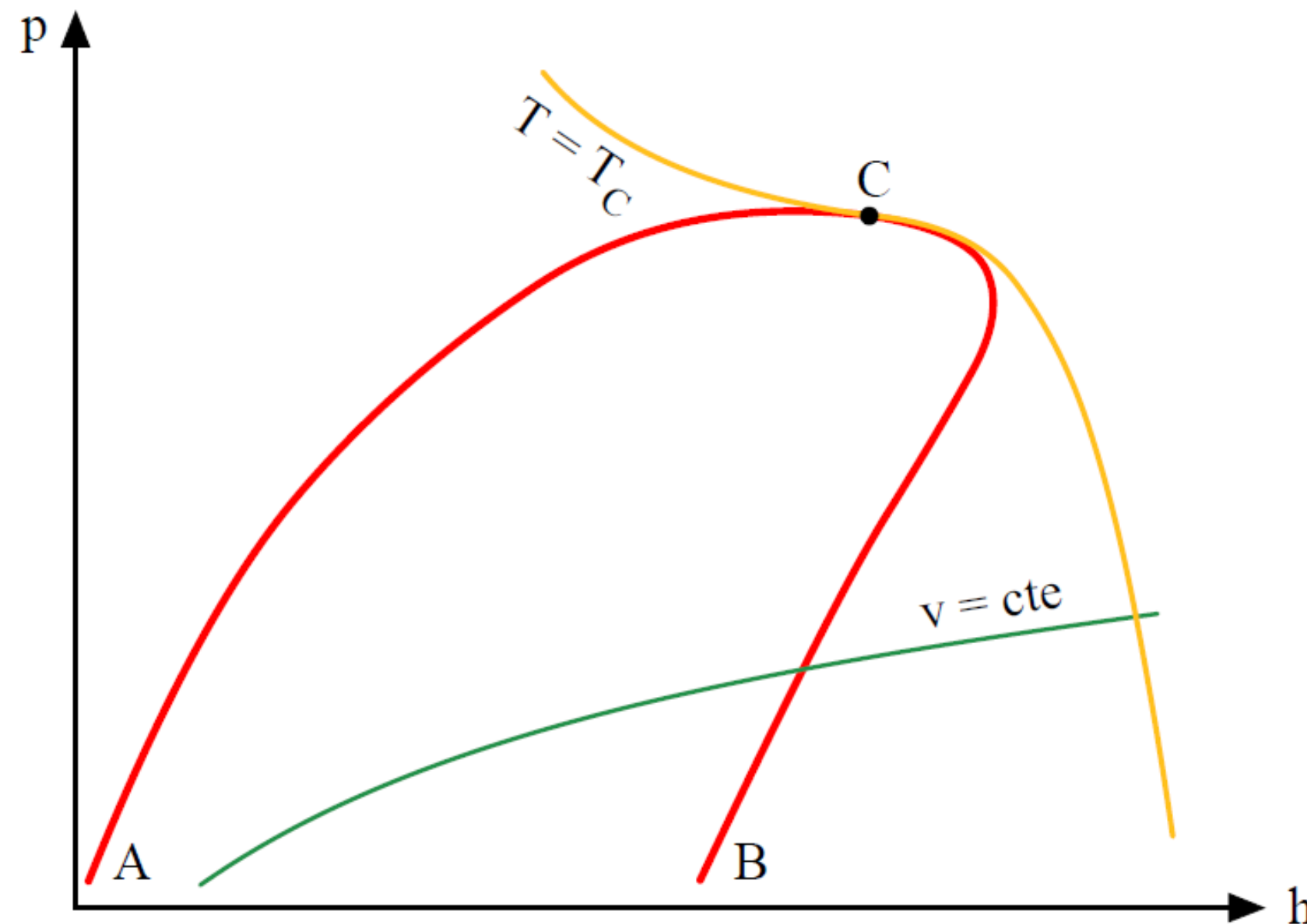
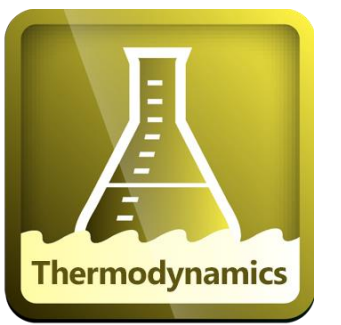
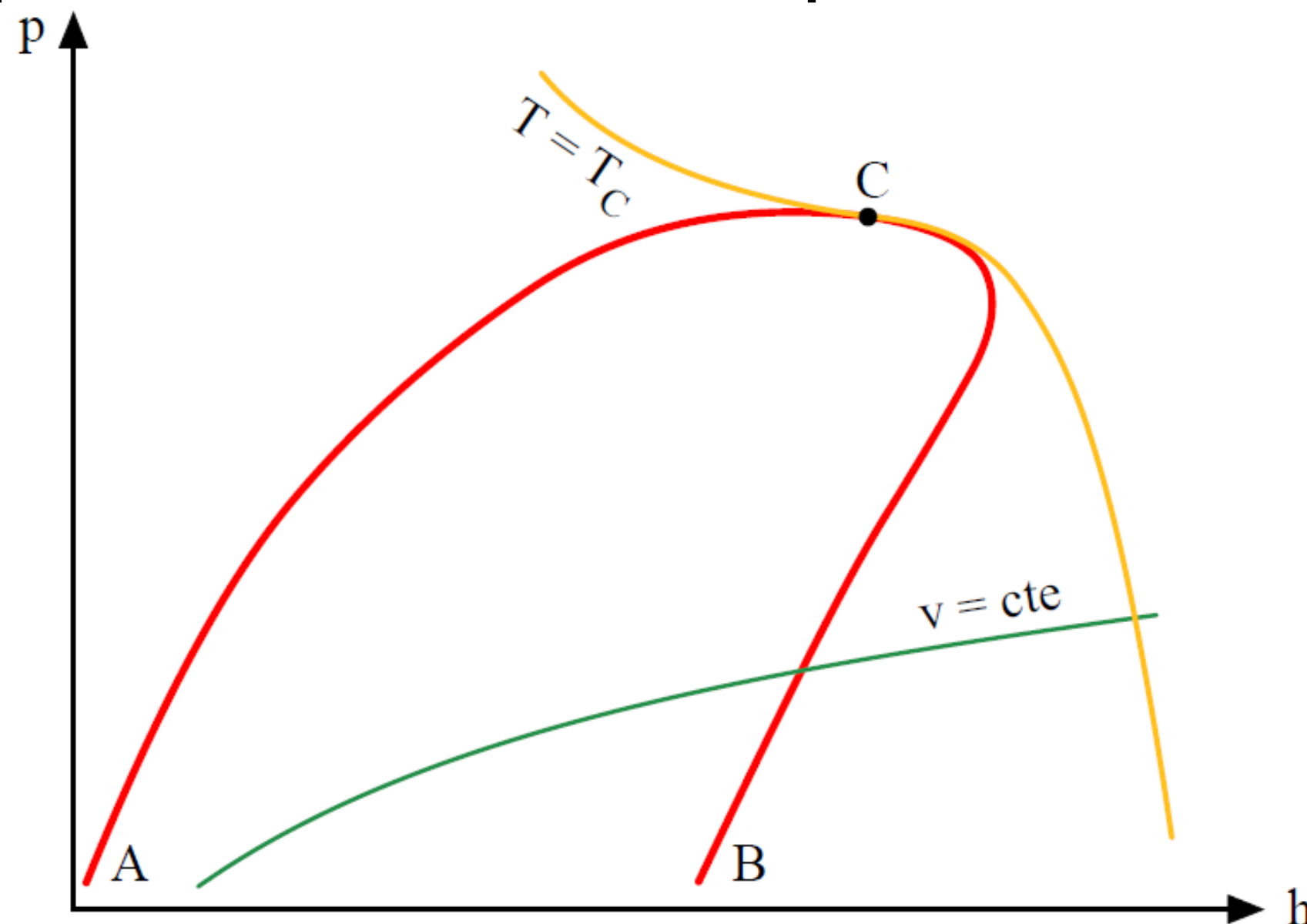


Diagramme LOG p (h)- Isovolumes



André Talla, Ing./Ph.D

- **Zone vapeur sèche** : allure semblable aux isotropes, mais de pentes relativement plus faibles



Preuve

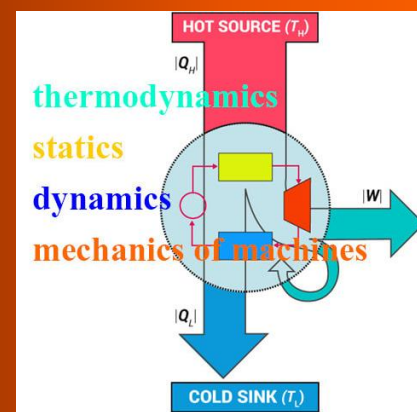
Quand on s'éloigne de la courbe de saturation, on a un gaz parfait. Nous avons :

$$pv = nRT \quad \text{et} \quad p \, dv + v \, dp = nR \, dT$$

$$\text{si } v = \text{const}, \text{ alors } v \, dp = nR \, dT$$

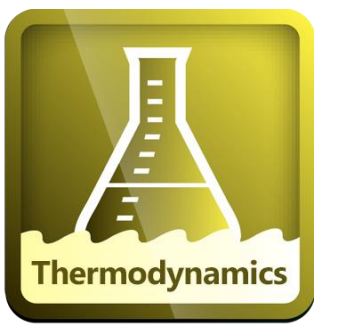
$$\text{et } dp = \frac{nR}{c_p} \frac{1}{v} \, dh = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{v} \, dh$$

$$\text{donc } \left. \frac{\partial P}{\partial h} \right|_v = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{v}$$



André Talla, Ing./Ph.D

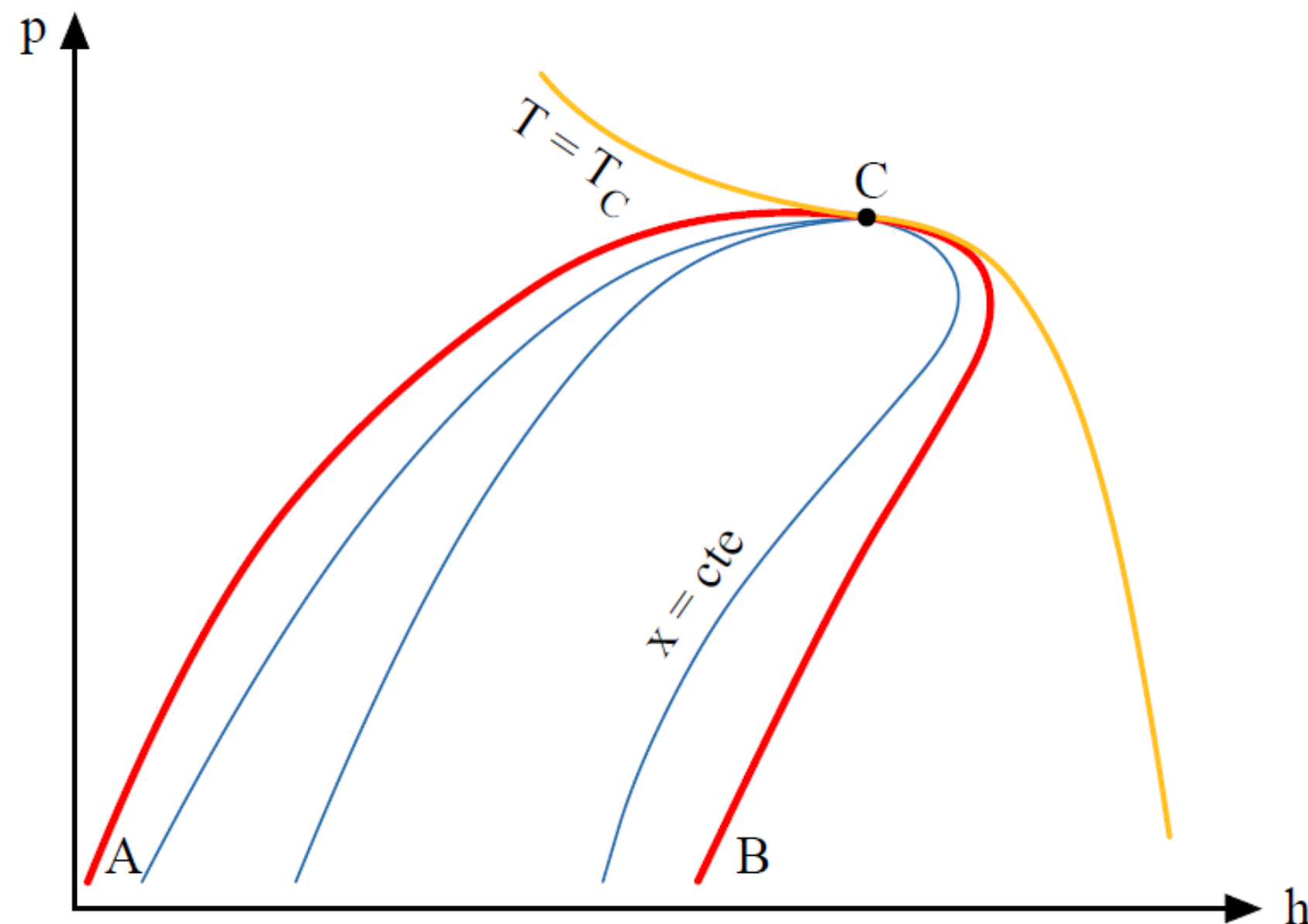
Diagramme LOG p (h)-titre de vapeur



André Talla, Ing./Ph.D

- Définition : $x = \frac{m_v}{m}$
où m_v masse de vapeur et m masse du mélange

On montre que : $x = \frac{h_M - h_A}{h_B - h_A}$



Preuve

Il suffit d'écrire :

$$\begin{cases} m = m_v + m_l \\ mh_M = m_v h_B + h_A s_A \end{cases}$$

Il résulte de ce système d'équation que :

$$\begin{cases} m_v = m \frac{h_M - h_A}{h_B - h_A} \\ m_l = m \frac{h_B - h_M}{h_B - h_A} \end{cases}$$

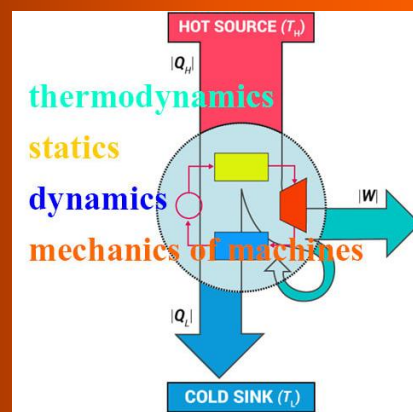
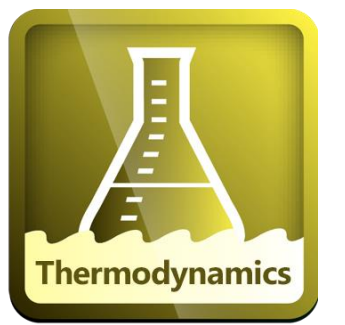




Diagramme LOG p (h)



André Talla, Ing./Ph.D

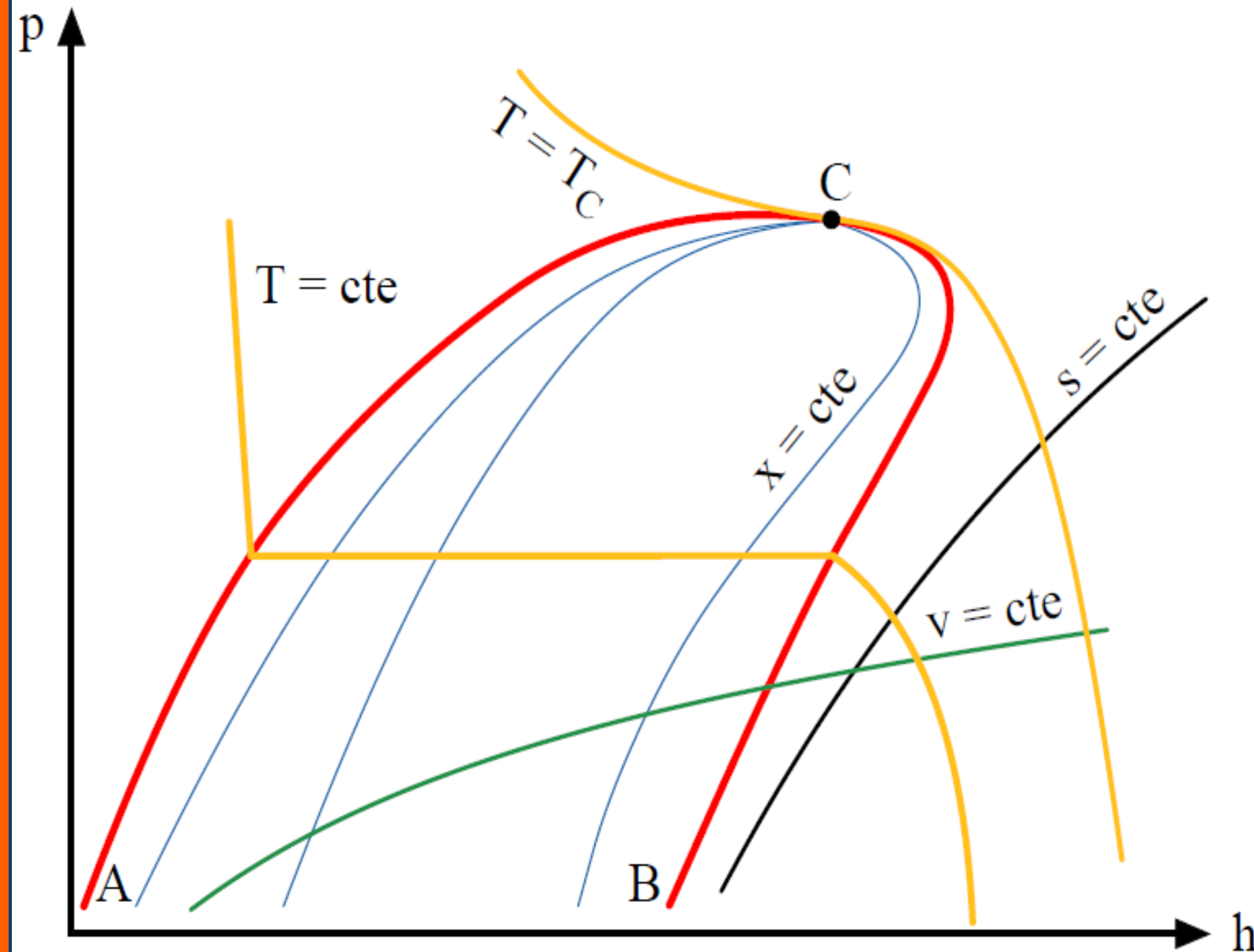
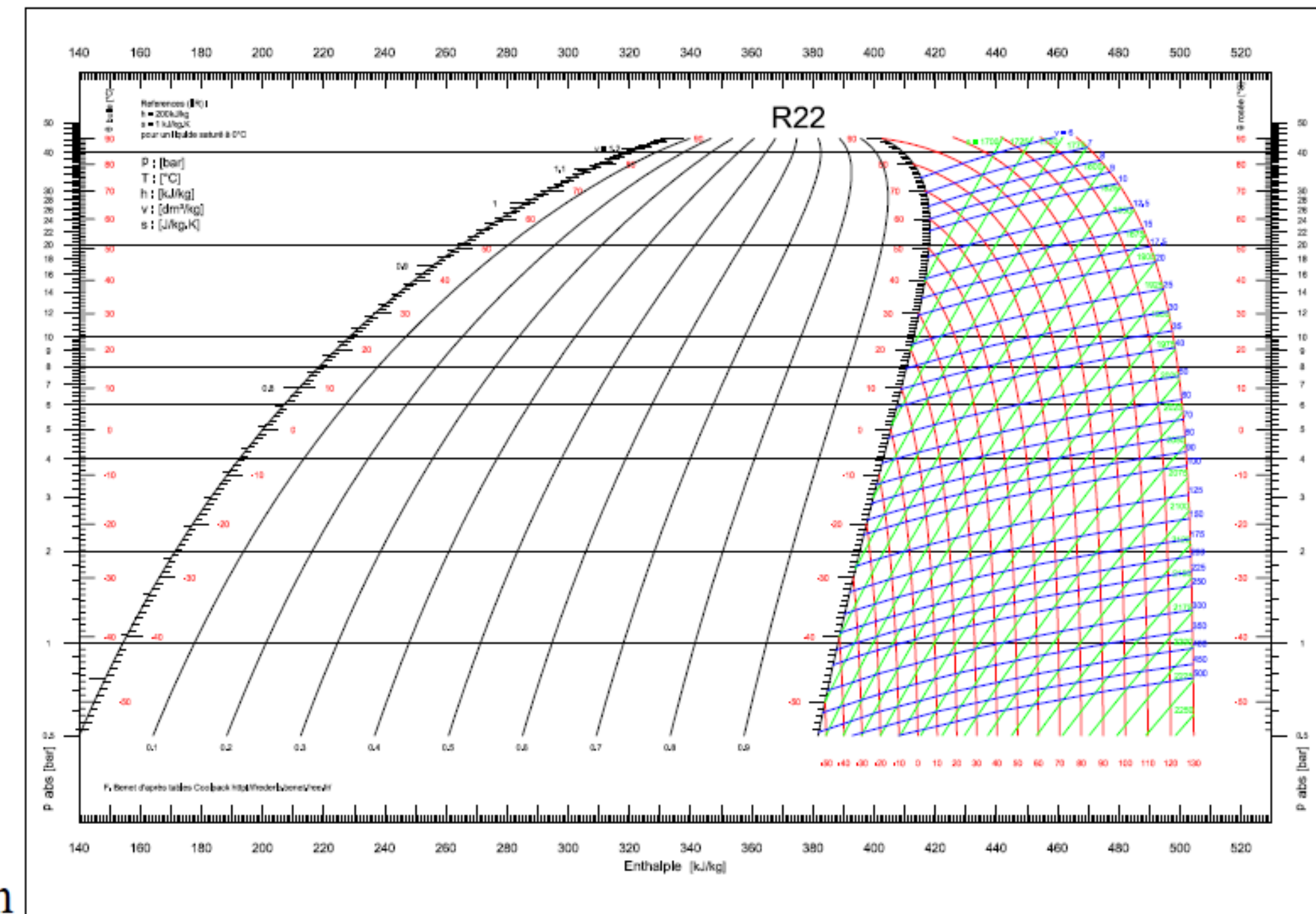
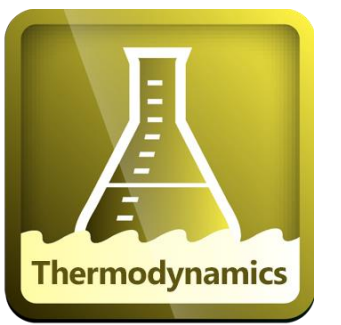


Diagramme LOG p (h) avec toutes les courbes décrites ci-dessus

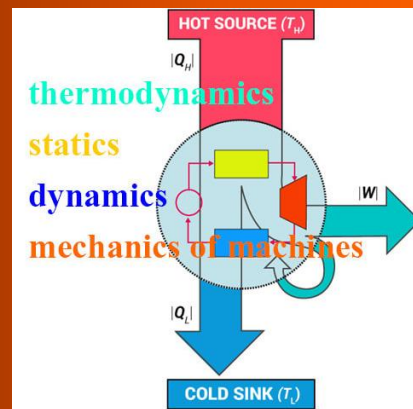


Exemple diagramme LOG p (h) pour le R22

Conclusion



André Talla, Ing./Ph.D



- Diagramme de Mollier utilisé dans les projets
- Diagramme de MOLLIER inexploitable dans la zone liquide ou liquide - vapeur à titre faible
- Diagramme LOG p (h) utilisé pour le dimensionnement des réfrigérateurs/pompes à chaleur

André Talla, Ing./Ph.D