Cours de Macrodynamique I

Chapitre 3 : La Théorie Néoclassique de la Croissance

(Modèle Solow-Swan)

Nvuh Njoya Youssouf[1]

[1]FSEG - Université de Yaoundé II-Soa

Licence Tronc commun, Semestre 1, 2024-2025

Plan de la présentation

Introduction

Ce chapitre présente le modèle néo-classique de la croissance développé indépendament par Robert Solow (1956) et Trevor Swan (1956) dans un contexte où la croissance d'après guerre fut relativement stable. Ce modèle est une réponse théorique aux prédictions pessimistes de Harrod. C'est un modèle de croissance équilibré reposant sur quelques hypothèses simplificatrices dont la flexibilité des prix des facteurs de productions. Cependant, les causes de la croissance économique durable et stable induites par la productivité des facteurs, l'augmentation de la population et le progrès technique sont exogènes. Après avoir exposé une version simple et instructif de ce modèle, nous introduirons un certains nombres d'hypothèses qui enrichirons la pertinence de ce modèle.

On considère une économie en concurrence parfaite dont l'offre de travail et l'état de la technologie sont donnés et que nous supposons pour l'instant constant. Supposons que les travailleurs utilisent un stock de capital agrégé noté K_t. Soit Y_t la quantité maximale d'output qui peut être produite et fonction de K_t par l'intermédiaire d'une fonction de production : $Y_t = F(K_t)$.

Cette fonction de production a plusieurs propriètés essentielles :

- elle est homogène de dégré 1 ;
- elle est à productivités marginales positives et décroissantes ;

$$F'(K_t) > 0 \; et \; F''(K_t) < 0 \; \forall K_t \tag{1}$$

- elle est concave et remplit les conditions d'Inada

$$\lim_{K_t \to 0} F(K_t) = 0 \; et \; \lim_{K_t \to \infty} F(K_t) = \infty \tag{2}$$

$$\lim_{K_t \to \infty} F'(K_t) = 0 \; et \; \lim_{K_t \to 0} F'(K_t) = \infty \tag{3}$$

On suppose que les individus épargnent une fraction constante de leur revenu brut Y_t, et qu'une fraction constante δ du stock de capital s'épuise chaque année à cause de la dépréciation.
L'investissement brut est donné par : $I_t = S_t = sY_t$ puisque nous sommes en économie fermée.
L'accroissement net du stock de capital par unité de temps (investissement net) est :

$$I_t - \delta K_t = sY_t - \delta K_t \tag{4}$$

C'est la différence entre le flux d'épargne agrégé sY_t et le taux auquel le capital ancien disparaît δK_t.
Nous supposons également le temps continu. L'investissement net est la dérivée de K par rapport au temps que nous noterons $\dot{K}_t$.

$$\dot{K}_t = \frac{\partial K_t}{\partial t} = I_t - \delta K_t$$

Ainsi nous obtenons :

$$\dot{K}_t = sF(K_t) - \delta K_t \tag{5}$$

L'équation (5) est l'**équation différentielle fondamentale de la théorie néoclassique de la croissance**. Il s'agit de la **dynamique d'accumulation du stock de capital**. Il décrit comment le taux de croissance du stock de capital à chaque période t est déterminé par la quantité de capital existante à chaque date.
L'état régulier ou stationnaire, ou encore sentier de croissance équilibrée est la situation dans laquelle toutes les quantités sont non nulles et croissent à taux constants.

À l'état régulier, K_t est constant dans le temps et égal à l'unique valeur $K_t^* > 0$ tel que :

$$\dot{K}_t = 0 \Rightarrow sF(K_t) - \delta K_t = 0 \Rightarrow sF(K_t) = \delta K_t \Rightarrow K_t = K_t^* \ \forall t$$

On obtient :

$$\frac{K_t^*}{Y_t^*} = \frac{s}{\delta} \tag{6}$$

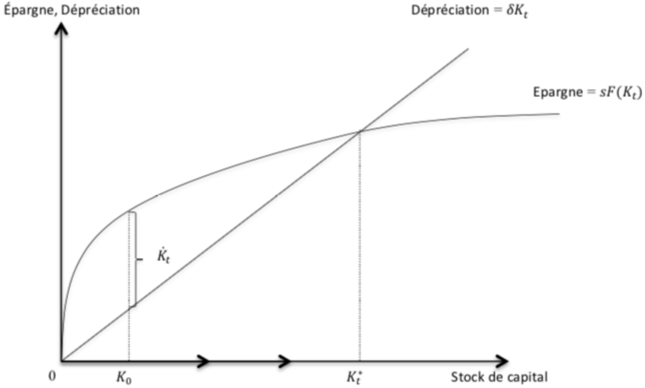


Figure 1 – Diagramme de Solow : Modèle simple

La figure 1 représente le comportement de l'équation fondamentale. Lorsque la courbe d'épargne est au-dessus de la droite de dépréciation au point K_0, le stock de capital augmente. L'augmentation se poursuit de façon monotone jusqu'à ce que le stock de capital converge à LT vers le point K_t^* donné par l'intersection des deux courbes. Ainsi, K_t^* correspond à l'unique état régulier stable de l'économie.
La logique économique de cette analyse est la suivante :
le capital est d'autant plus productif qu'il est rare $\Rightarrow F(K_t) > K_t$.
Alors, les ménages épargnent plus qu'il n'est nécessaire pour compenser la dépréciation du capital. K_t et $F(K_t)$ augmentent.
Or, puisque la productivité marginale est décroissante, $F(K_t)$ n'augmente pas aussi rapidement que $K_t \Rightarrow$ l'épargne n'augmente pas aussi rapidement que la dépréciation.

Au final, la dépréciation rattrape l'épargne : K_t et $F(K_t)$ n'augmentent plus.
Par conséquent, toute tentative pour simuler la croissance en incitant les ménages à épargner davantage est, à terme condamné à l'échec.

En reprenant en compte les hypothèses du modèle simple, supposons à présent que l'output dépend du capital et du travail. La fonction de production s'écrit de la façon suivante : $Y_t = F(K_t, L_t)$. Cette fonction de production a également plusieurs propriétés essentielles :

- elle est à productivités marginales positives et décroissantes ;

$$F'(K_t) > 0 \; et \; F''(K_t) < 0 \; \forall K_t \tag{7}$$

$$F'(L_t) > 0 \; et \; F''(L_t) < 0 \; \forall L_t \tag{8}$$

- elle est homogène de dégré 1 ; autrement dit

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda F(K_t, L_t) \; \forall \lambda, K_t, L_t$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{L_t} \Rightarrow y_t = f(k_t)$, avec $y_t = \frac{Y_t}{L_t}$ et $k_t = \frac{K_t}{L_t}$

La fonction $f(k_t)$ est la fonction de production par tête. Cette reformulation de la fonction de production indique que chaque travailleur produit en utilisant sa part de stock de capital agrégé. On considère également que $f(k_t)$ est concave et remplit les conditions d'Inada :

$$f(0) = 0; f(\infty) = \infty; f'(0) = \infty; f'(\infty) = 0 \tag{9}$$

les facteurs de production sont rémunérés à leur productivités marginales

$$PmL = f'(L) = f(k) - kf'(k) \tag{10}$$

$$pmK = f'(K) = f'(k) \tag{11}$$

La population active correspond au facteur travail et croît au taux constant et exogène n :

$$L_t = L_0 e^{nt} \tag{12}$$

L'équilibre sur le marché des biens se traduit par l'égalité de l'épargne et de l'investissement brut : $I_t = S_t$ avec $S_t = sY_t$

L'accroissement net du stock de capital par unité de temps est :

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t$$

En divisant par L_t

$$\dot{k}_t = sy_t - \delta k_t$$

En partant du principe que $k_t = \dfrac{K_t}{L_t}$, On dérive cette expression par le temps, on obtient :

$$\dot{k}_t = \frac{\partial k_t}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t L_t - K_t \dot{L}_t}{L_t^2} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - \frac{K_t}{L_t}\frac{\dot{L}_t}{L_t} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - k_t n$$

$$\text{Avec } \frac{\dot{L}_t}{L_t} = \text{n}$$

En remplaçant $\dot{K}_t$ par son expression on a :

$$\dot{k}_t = \frac{sY_t - \delta K_t}{L_t} - nk_t = sy_t - \delta k_t - nk_t$$

Au final On obtient :

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (n + \delta)k_t \tag{13}$$

L'équation(13) est **l'équation différentielle de Solow qui désigne l'accumulation du capital par tête**. Cette équation est très similaire à l'équation fondamentale (5) décrivant le stock de capital que nous présenté dans la section précédente. Cependant, le taux de dépréciation inclut désormais le taux de croissance de la population, et la fonction de production par tête f remplace la fonction de production agrégée F.

À l'état stationnaire, le capital finit par atteindre un niveau dans lequel l'épargne est juste suffisante pour compenser les effets de la dépréciation et de la croissance de la population.

$$\exists k_t^* \text{ } unique \text{ } tel \text{ } que \text{ } \dot{k_t} = 0 \Rightarrow sf(k_t) = (n+\delta)k_t \Rightarrow k_t = k_t^* \; \forall t$$

On obtient :

$$\frac{k_t^*}{y_t^*} = \frac{s}{(n+\delta)} \tag{14}$$

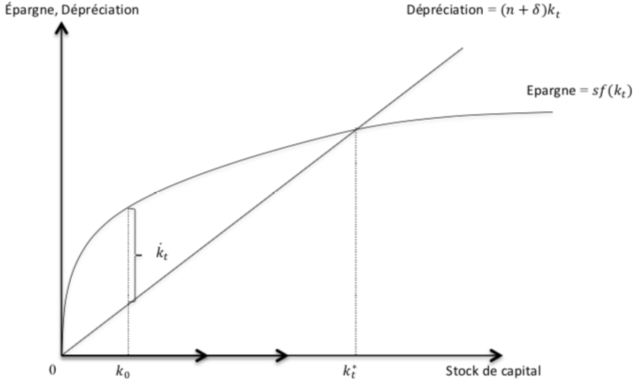


Figure 2 – Diagramme de Solow : Modèle avec croissance démographique

Puisque le stock de capital par tête converge vers k_t^*, le niveau d'output par tête converge à son tour vers la valeur d'état régulier correspondante $y_t^* = f(k_t^*)$. Une fois cette valeur atteinte, l'output et le stock de capital continuent de croître, mais seulement au taux de croissance de la population. La croissance, mesurée par le taux de croissance de l'output par tête cesse donc à LT.

Sur le sentier de croissance équilibrée, dans ce cas, la production, le capital et la population active croissent au même taux. On a donc une double égalité :

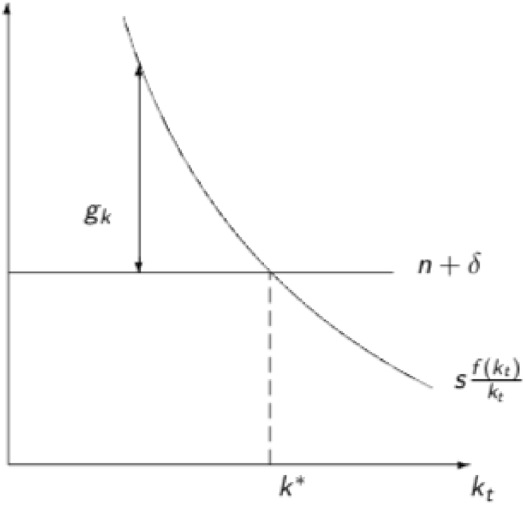
$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = n$$

Le taux de croissance naturel est ainsi le déterminant ultime de la croissance.

Une autre propriété importante de la croissance équilibrée est sa stabilité.
Cette dernière est illustrée par le graphique ci-dessus qui représente le taux de croissance du capital par tête en fonction de la valeur de k. Si on désigne par g_k le taux de variation de k_t On aura :

$$g_k = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{sf(k_t)}{k_t} - (n+\delta)$$

En d'autres termes, g_k est l'écart entre le taux de croissance nécessaire ($\frac{sf(k_t)}{k_t}$) et le taux de croissance naturel $(n+\delta)$.


g_k
$n+\delta$
$s\frac{f(k_t)}{k_t}$
k^*
k_t

Si $g_k > 0$, k_t augmente. Cependant, $(\dfrac{f(k_t)}{k_t})$ décroît avec k_t. Il en résulte que g_k va diminuer progressivement jusqu'à s'annuler. Inversement, si g_k est initialement négatif, k_t diminue, ce qui fait augmenter le rapport $(\dfrac{f(k_t)}{k_t})$ jusqu'à ce que l'écart par rapport à n disparaisse. Grâce aux conditions d'Inada, l'équilibre est stationnaire et stable.

Dans le modèle de Solow, deux gands chocs peuvent affecter l'économie. Il s'agit :

- Choc 1 : Une modification du taux d'épargne
- Choc 2 : Une modification du taux de croissance démographique

Avant les différents chocs, l'économie se situe à l'état stationnaire. Dans le cas du choc 1, on va supposer une hausse du taux d'épargne et dans le cas du choc 2, on va considérer une hausse du taux de croissance démographique.

Choc 1

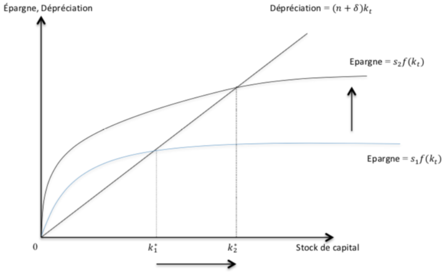


Figure 4 – Cas d'une hausse du taux d'épargne

Une hausse d'épargne entraîne une augmentation de l'intensité capitaliste d'équilibre. Elle passe de $k_{\mathbf{1}}^*$ à $k_{\mathbf{2}}^*$ (avec $k_{\mathbf{1}}^* > k_{\mathbf{1}}^*$). L'économie dégage un produit plus élevé qu'auparavant. Cependant, elle sera parvenue à accélérer son taux de croissance que pendant un certain temps.

Choc 2

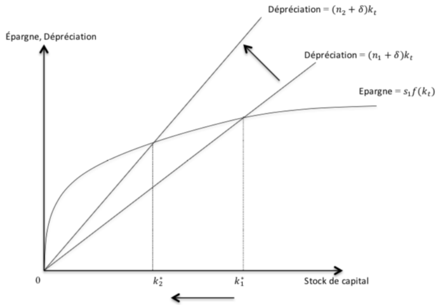


Figure 5 – Cas d'une hausse du taux de croissance de la population

Une hausse du taux de croissance de la population entraîne une baisse de l'intensité capitaliste d'équilibre et l'apparition du chômage. Elle passe de k_1^* à k_2^* (avec $k_2^* < k_1^*$). En effet, la baisse du prix relatif du travail entraîne elle-même l'emploi de combinaisons productives moins capitalistes (baisse de k). l'augmentation de la productivité du capital qui en resulte se traduit par une baisse de la valeur du coefficient de capital. Progressivement l'égalité entre le taux de croissance nécessaire et le taux de croissance naturel est rétablie.

Le progrès technique (PT) :

- permet, à inputs (capital et travail) donnés, d'obtenir, au cours d'une période, un accroissement de l'output ;
- permet d'obtenir, au cours d'une période, le même output avec moins de facteurs

Déformation temporelle des possibilités de production :

$$Y_t = F(K_t, L_t, t)$$

On distingue deux types de PT :

- Progrès technique non incorporé (ou autonome) : s'applique uniformément à toutes les ressources en hommes et en machines, indépendamment de l'âge des machines et de leur date d'installation, et de l'âge des travailleurs.
- Progrès technique incorporé : s'applique seulement à certaines parties de l'équipement en capital ou à certaines générations de travailleurs : les plus récentes. Le capital et le travail ne sont plus homogènes mais sont composés de générations successives.

Cas du PT non incorporé

- Le PT porte sur le travail ou encore économique le travail s'il existe une suite croissante A_t (avec A_0=1) telle que :

$$F(K_t, L_t, t) = F(K_t, A_t L_t)$$

- Le PT porte sur le capital s'il existe une suite croissante B_t (avec B_0=1) telle que :

$$F(K_t, L_t, t) = F(B_t K_t, L_t)$$

- Le PT porte sur la production s'il existe une suite croissante C_t (avec C_0=1) telle que :

$$F(K_t, L_t, t) = C_t F(K_t, L_t)$$

La notion de neutralité du PT : recouvre les formes de PT telles que "l'équilibre" entre capital et travail reste inchangé au cours du déplacement temporel de la fonction de production. Un PT neutre est un PT qui ne modifie pas certaines de ces grandeurs. On distingue la neutralité au sens de Harrod, au sens de Solow et au sens de Hicks.

- **Neutralité au sens de Harrod** : il porte sur le travail et permet une croissance au cours de laquelle le rapport capital-produit reste inchangé à coût réel du capital inchangé.
- **Neutralité au sens de Solow** : il porte sur le capital et permet une croissance au cours de laquelle le produit par tête reste inchangé.
- **Neutralité au sens de Hicks** : il porte sur la production. À proportion des facteurs inchangée la répartition reste inchangée.

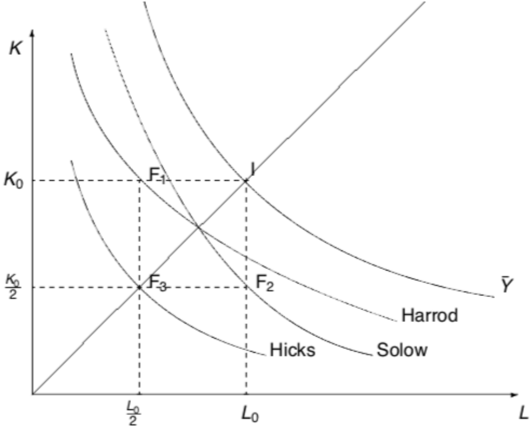


Figure 6 – Neutralité du PT

La persistance à LT de la croissance de l'output par tête observé dans les pays développés depuis la Révolution industrielle ne peut s'expliquer que par la prise en compte du PT qui compense l'effet négatif des rendements décroissants. Pour le mettre en évidence supposons qu'il y ait un paramètre de productivité noté A_t dans la fonction de production, reflétant l'état des connaissances à un moment donné. Ce paramètre de productivité croît au taux constant m. la valeur exogène m est supposé traduire les progrès scientifiques. Il s'agit du PT portant sur le travail, neutre au sens de Harrod :

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t) = F(K_t, e^{mt} L_t) = Y_t = F(K_t, E_t) \tag{15}$$

$$Avec\ E_t = e^{mt} L_t$$

À la différence du modèle de la section précédente, on raisonnera en terme de nombre **d'unités efficaces**. Ainsi, on aura :

$$\hat{y}_t = f(\hat{k}_t) = \frac{Y_t}{E_t} \tag{16}$$

$$\hat{k}_t = \frac{K_t}{E_t} \tag{17}$$

Respectivement l'output par tête, ainsi que l'intensité capitalistique en terme d'unité de travail efficace

Nous savons que $\hat{k}_t = \dfrac{K_t}{E_t}$, On dérive cette expression par le temps, on obtient :

$$\dot{k}_t = \frac{\partial \hat{k}_t}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t E_t - K_t \dot{E}_t}{E_t^2} = \frac{\dot{K}_t}{E_t} - \frac{K_t}{E_t}\frac{\dot{E}_t}{E_t} = \frac{\dot{K}_t}{E_t} - \hat{k}_t(n+m)$$

En remplaçant $\dot{K}_t$ par son expression on a :

$$\dot{k}_t = \frac{sY_t - \delta K_t}{E_t} - (n+m)\hat{k}_t = s\hat{y}_t - \delta \hat{k}_t - (n+m)\hat{k}_t$$

Au final On obtient :

$$\dot{k}_t = sf(\hat{k}_t) - (n+m+\delta)\hat{k}_t \tag{18}$$

L'équation (18) est **l'équation différentielle de Solow qui désigne l'accumulation du capital par tête d'équilibre en unité de travail efficace**.
À l'état stationnaire, le capital finit par atteindre un niveau dans lequel l'épargne est juste suffisante pour compenser les effets de la dépréciation, de la productivité du travail et de la croissance de la population.

$$\exists k_t^* \text{ } unique \text{ } tel \text{ } que \text{ } \dot{k}_t = 0 \Rightarrow sf(\hat{k}_t) = (n+m+\delta)\hat{k}_t \Rightarrow \hat{k}_t = k_t^* \; \forall t$$

On obtient :

$$\frac{k_t^*}{y_t^*} = \frac{s}{(n+m+\delta)} \tag{19}$$

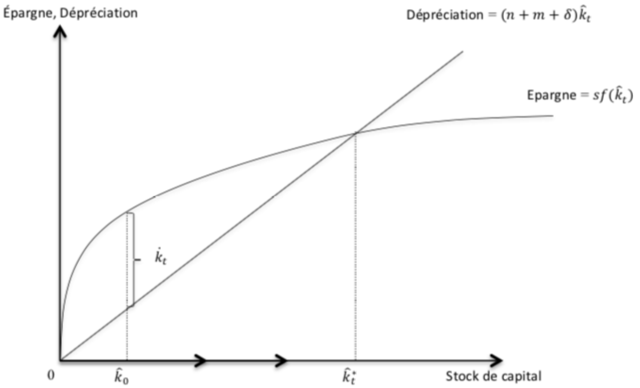


Figure 7 – Diagramme de Solow : Modèle avec PT

Sur le sentier de croissance de longue période, le taux de croissance nécessaire est égal au taux de croissance naturel. Comme le coefficient de capital est constant ($\hat{k}_t$ et $\hat{y}_t$ constants) sur ce sentier, le taux de croissance du produit est égal à celui du capital, c'est-à-dire à m+n. On peut donc écrire :

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = m + n \tag{20}$$

La croissance de l'économie est la somme de la croissance démographique et du progrès technique.

Dans le modèle de Solow, le taux de croissance à LT est indépendant du taux d'épargne. Toutefois, ce dernier a un rôle important à jouer dans le choix d'un sentier de croissance de l'économie. En effet, le taux d'épargne détermine le niveau de consommation d'état régulier et le taux de croissance de dynamique transitoire. Le choix du taux d'épargne a donc des implications en termes de bien-être.
Une accumulation du taux d'épargne a deux conséquences contradictoires :

- diminue mécaniquement la consommation par tête ;
- fait croître temporairement l capital par tête et la production par tête, donc la consommation par tête.

L'analyse dans cette section est normative, on cherche le meilleur taux d'épargne, et donc le meilleur sentier de croissance de l'économie(au sens de la consommation par tête la plus grande) parmi tous les sentiers de croissance de l'économie possibles, sans tenir compte de la situation initiale de l'économie.

Pas simplification, on considère le modèle de Solow sans PT.
Pour calculer le taux d'épargne qui maximise la consommation par tête, on considère l'expression de cette dernière en fonction de k_t.

$$c_t(k_t) = f(k_t) - sf(k_t) \tag{21}$$

À l'état stationnaire :

$$sf(k_t^*) = (n+\delta)k_t^*$$

Le long d'un sentier de croissance économique, la consommation par tête vaut :

$$c_t(k_t^*) = f(k_t^*) - (n+\delta)k_t^*$$

Le capital par tête stationnaire qui maximise la croissance est obtenu pour $k^* = k^{or}$ tel que :

$$\frac{\partial c_t(k_t^{or})}{k_t^{or}} = 0 \Rightarrow f'(k_t^{or}) - (n+\delta) = 0 \Rightarrow f'(k_t^{or}) = (n+\delta) \tag{22}$$

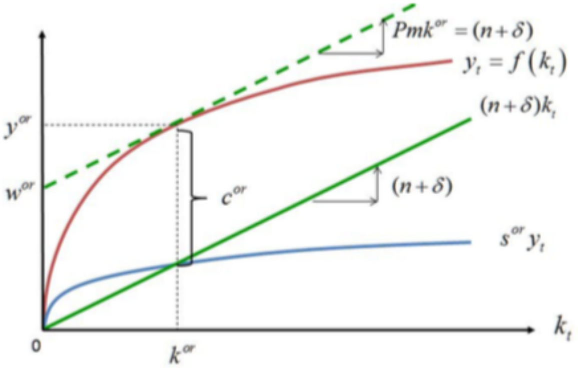


Figure 8 – La règle d'or

Le capital qui maximise la consommation par tête à l'état stationnaire est tel que la PmK égalise $(n+\delta)$.

Les agents devraient adopter un taux d'épargne qui garanti que l'état stationnaire soit tel que la productivité marginale du capital égalise $(n+\delta)$. C'est le **critère de Phelps** appelé également **règle d'or**.

La Pmk est le rendement brut du capital (avant dépréciation). Le rendement net du capital appelé le *taux d'intérêt* et il est égal à la Pmk net du taux de dépréciation du capital. À la règle d'or on a :

$$r^{or} = PmK^{or} - \delta = n \tag{23}$$

Le taux d'intérêt doit être égal au taux de croissance de l'économie. Si on avait un modèle de Solow avec PT, à la règle d'or on aurait :

$$r^{or} = PmK^{or} - \delta = n + m \tag{24}$$

Après avoir déterminé le taux d'épargne optimal d'état régulier, examinons dès à présent les conséquences transitoires d'une politique qui modifie ce taux. On va considérer deux situations :

- Situation 1 : l'économie démarre avec un niveau d'épargne supérieur à celui de la règle d'or
- Situation 2 : l'économie démarre avec un niveau d'épargne inférieur à celui de la règle d'or

Situation 1 : $\bar{s} > s^{or}$

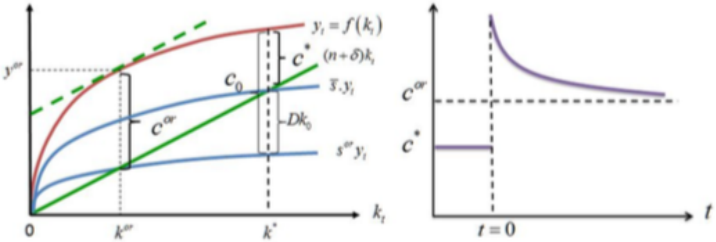


Figure 9 – l'économie démarre avec une épargne trop forte

Lorsque $\bar{s} > s^{or} \Rightarrow k^{*} > k^{or}$
Le dictateur bienveillant a intérêt à baisser le taux d'épargne. Ce niveau d'épargne est inefficient car une consommation par tête plus élevée pourrait être obtenue en tout point du temps en diminuant le taux d'épargne : on parle d'**inefficience dynamique**. Cette politique est **une amélioration au sens de pareto** car la génération présente pourrait consommer plus et permettrait aux générations suivantes d'avoir une consommation maximum.
Selon la figure (9) à la date t = 0 de la politique (baisse de $\bar{s}$ à s^{or}) la consommation se retrouve immédiatement au dessus de son niveau initial et y reste durant toute la dynamique transitoire, c'est donc une bonne politique (au sens de Pareto : toutes les générations y gagnent).

Situation 2 : $\bar{s} < s^{or}$

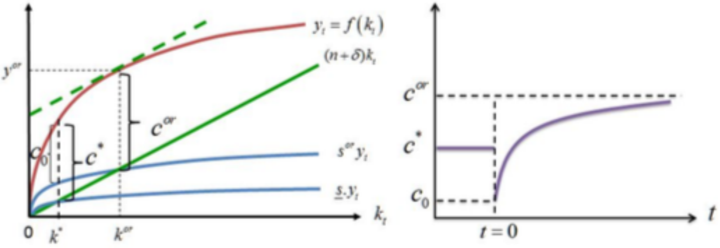


Figure 10 – l'économie démarre avec une épargne trop faible

Lorsque $\bar{s} < s^{or} \Rightarrow k^* < k^{or}$
On ne peut pas savoir dans ce cas si le dictateur bienveillant à intérêt à augmenter le taux d'épargne. Cette politique n'est pas une amélioration au sens de Pareto.
Selon la figure (10) à la date t $= 0$ de la politique (hausse de $\bar{s}$ à s^{or}), la consommation baisse, puis augmente progressivement durant la dynamique transitoire et se retrouve en fin de compte au dessus de son niveau initial. Mais durant la dynamique transitoire, la consommation est en dessous de son niveau initial. On ne peut pas être sûr que cette politique augmente le bien-être de la société. Augmenter le taux d'épargne augmentera le bien-être des générations futures, mais baisse pour l'instant le bien-être des générations présentes. Cette politique **n'est donc pas une amélioration au sens de Pareto**.

On peut retenir trois principales limites du modèle de Solow :

- La croissance économique transitoire à LT ;
- l'exogéneité du progrès technique ;
- l'exogéneité du taux d'épargne ;