MESURES ET INCERTITUDES

I – MESURES ET ERREURS DE MESURES

1) Mesure d'une grandeur physique

Une grandeur est utilisée en science pour caractériser un objet ou un événement.
La mesure de grandeurs physiques (température, masse, vitesse, tension, longueur, etc.) est une étape essentielle de l'activité scientifique. Elle intervient aussi dans de nombreuses activités quotidiennes comme le pesage dans le commerce, la mesure de la vitesse avec un radar, l'analyse biologique, etc.

2) Intervalle de confiance

Cependant, quelles que soient la qualité du matériel et les compétences de l'expérimentateur, une mesure expérimentale est toujours affectée d'une incertitude. Il convient donc d'associer aux résultats de la mesure l'incertitude correspondante, c'est-à-dire l'intervalle des valeurs dans laquelle la **valeur vraie** se trouve avec une très forte probabilité.
La **valeur vraie** d'une grandeur est la valeur que l'on obtiendrait si la mesure était parfaite Elle n'est donc pas accessible du fait des fluctuations de tout phénomène et des imperfections des mesures.
Une mesure est d'autant plus précise que l'incertitude qui lui est associée est faible.

3) Erreurs de mesure

Les erreurs de mesure peuvent être dues à l'instrument de mesure, à l'opérateur ou à la variabilité de la grandeur mesurée. On les classe en deux catégories : les erreurs aléatoires et des erreurs systématiques.

a) Les erreurs aléatoires

Les erreurs aléatoires sont dues :

- ✓ à la **fluctuation de la grandeur mesurée**, qui n'est pas forcément stable dans le temps (la distance Terre – Lune) ou qui n'est pas la même dans tout l'échantillon (la température de la mer mesurée par le surveillant de la plage) ;
- ✓ aux **fluctuations de la méthode de mesure**, c'est-à-dire à la manière d'utiliser l'appareil par l'expérimentateur

Ces fluctuations se traduisent par un écart entre les différentes valeurs obtenues lors des mesures.

*D'une mesure à l'autre, l'erreur aléatoire varie. Plus les erreurs aléatoires sont petites, plus la **fidélité** de la mesurée est grande.*
*Un dispositif est d'autant plus **fidèle** qu'il donne des résultats plus voisins les uns des autres lorsque l'on répète la même mesure à plusieurs reprises.*

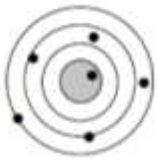
b) Les erreurs systématiques

Les erreurs systématiques sont liées à l'appareil de mesure et peuvent disparaître par le réglage.

*Plus l'erreur systématiques de mesurée petite, plus la **justesse** de la mesurée grande.*
*Un dispositif est d'autant plus **juste** que la moyenne des résultats qu'il fournit lorsque l'on répète la même mesure à plusieurs reprises est plus proche de la valeur vraie de la grandeur mesurée.*

La difficulté d'obtenir une valeur fiable d'une grandeur est analogue à celle que rencontre un tireur sur une cible. Elle est due soit à des erreurs aléatoires (figure 1), soit des erreurs systématiques (figure 2), soit aux deux à la fois (figure 3)

Figure 1 :

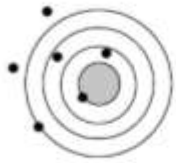


juste, mais pas fidèle
(valeurs centrées mais dispersées)
erreurs aléatoires

Figure 2 :

fidèle, mais pas juste
(valeurs décentrées mais resserrées)
erreurs systématiques

Figure 3 :



ni juste, ni fidèle
erreurs aléatoires et systématiques

Figure 4 :

fidèle et juste
erreurs faibles

II – EVALUATION DES INCERTITUDES DE MESURE

1) Incertitude absolue

La valeur X d'une grandeur, résultant d'une mesure, peut être présentée comme une valeur estimée $X_{estimée}$ associée à son incertitude absolue ΔX (nombre positif) : $X = X_{estimée} \pm \Delta X$
Ceci revient à donner pour X l'encadrement suivant qui définit l'intervalle de confiance de X :

$$X_{estimée} - \Delta X \leq X \leq X_{estimée} + \Delta X$$

Exemple :
le résultat d'une mesure d'intensité à l'aide d'un ampèremètre peut-être donné sous la forme :
I = 4,35 ± 0,03mA. Cela signifie que l'intensité est comprise entre 4,32mA et 4,38mA.

Remarque :
Lorsque la valeur d'une grandeur est fournie sans incertitude, cette dernière est, par convention, égale à une demi-unité du dernier chiffre significatif exprimé.

Exemple :
m = 1,4g signifie m = 1,4 ± 0,05g

2) Incertitude relative

L'incertitude relative correspond à la proportion de l'incertitude absolue ΔX comparée à la valeur estimée $X_{estimée}$ d'une mesure : plus l'incertitude relative est petite, plus la valeur mesurée est précise.
L'incertitude relative s'obtient en calculant : $\frac{\Delta X}{|X_{estimée}|}$,
Elle n'a pas d'unité et s'exprime souvent en pourcentage. Elle les donnait la plupart du temps avec un seul chiffre significatif.

Exemple :
La largeur d'une feuille de papier mesurée au demi-millimètre près à l'aide d'une règle graduée vaut:
L = 21,00 ± 0,05 cm
Le rayon équatorial de la planète Mars n'est connu qu'à 100 m près : R = 3396,2 ± 0,1km
Déterminer les incertitudes relatives de ces deux mesures et comparer leur précision.
Pour la largeur de la feuille de papier : $\frac{\Delta L}{L} = \frac{0{,}05}{21{,}00} = 2.10^{-3}$
Pour le rayon équatorial de mars : $\frac{\Delta R}{R} = \frac{0{,}1}{3396{,}2} = 3.10^{-5}$
La mesure du rayon équatorial de Mars est donc beaucoup plus précise que celle de la largeur de la feuille.

3) Évaluer une incertitude sur une mesure unique

L'incertitude d'une mesure unique dépend de deux sources d'informations :
- ✓ *des informations techniques sur l'instrument de mesure données par le fabricant ou connues conventionnellement ;*
- ✓ *des informations subjectives sur l'appréciation de la méthode utilisée pour effectuer la mesure*

Remarque : Les formules d'évaluation de l'incertitude seront fournies systématiquement.

a) Cas d'une lecture simple sur une échelle graduée

Lorsque la mesure est obtenue par lecture sur une échelle ou un cadran, pour un niveau de confiance de 95 %, l'incertitude de la mesure liée à la lecture est estimée à : $\boldsymbol{U_{lecture}} = \frac{\boldsymbol{2graduations}}{\sqrt{\boldsymbol{12}}}$

b) Cas d'une double lecture sur une échelle graduée

Lorsque la mesure nécessite une double lecture, les incertitudes liées à la lecture peuvent se cumuler ou se compenser, totalement ou partiellement. Pour un niveau de confiance de 95 %, l'incertitude liée à la lecture est estimée à :$\boldsymbol{U_{double\ lecture}} = \sqrt{\boldsymbol{2} \times \left(\frac{\boldsymbol{2\ graduations}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}\right)^{\boldsymbol{2}}}=\sqrt{\boldsymbol{2}}.\boldsymbol{U_{lecture}}$

Exemple :

La mesure de la distance notée d entre une lentille et le plan de formation de l'image nécessite de repérer les positions de ces deux instruments sur le banc optique. Celui-ci étant graduée en millimètres, l'incertitude liée à la double lecture est : $\boldsymbol{U_{double\ lecture}(d)} = \sqrt{\boldsymbol{2} \times \left(\frac{\boldsymbol{2\times 1}}{\sqrt{\boldsymbol{12}}}\right)^{\boldsymbol{2}}} = \boldsymbol{0,82}$mm

En pratique, cette incertitude est souvent arrondie à 1mm.

c) Cas d'une double mesure obtenue avec un appareil de tolérance connue

Lorsque la mesure est obtenue avec un appareil pour lequel le constructeur indique la tolérance t (noté $\pm \boldsymbol{t}$)l'incertitude liée à la tolérance de cet appareil est estimée à$\frac{\boldsymbol{2t}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}}$.

Exemple :

Une pipette jaugée de 10,0mL de classe A possède une tolérance de 0,02mL

L'incertitude sur la mesure d'un volume V liée à la tolérance de la pipette est :

$\boldsymbol{U_{tolérance}(V)} = \frac{\boldsymbol{2\times 0,02}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}}$=0,023mL

4) Évaluer une incertitude sur une mesure dans laquelle interviennent plusieurs sources d'erreurs

Lors d'une mesure, il est fréquent d'avoir plusieurs sources d'erreur à prendre en compte. C'est notamment le cas lorsque :
- ✓ *la mesure fait intervenir une ou plusieurs lectures avec un appareil de tolérance donnée ;*
- ✓ *la mesure fait intervenir un calcul avec des valeurs dont les incertitudes sont connues*

Remarque : Les formules d'évaluation de l'incertitude seront fournies systématiquement.

Exemple :

Une burette graduée de tolérance t = $\pm$0,05mL est graduée en dixièmes de millilitre.

On suppose que l'opérateur utilise une méthode de lecture du volume correcte. On ne prendra donc en compte que l'incertitude de lecture sur l'échelle graduée de la burette.

- ✓ Pour faire une mesure de volume V versé, il faut faire deux lectures de volume successives (le zéro et le volume versé) et l'incertitude associée à chaque lecture est :$\boldsymbol{U_{lecture}(V)} = \frac{\boldsymbol{2\times 0,1}}{\sqrt{\boldsymbol{12}}}\boldsymbol{mL}$

✓ D'autre part, l'incertitude liée à la tolérance indiquée par le constructeur est : $\boldsymbol{U_{tolérance}(V) = \frac{2\times 0{,}05}{\sqrt{3}}\,mL}$
En tenant compte des deux sources d'erreurs, l'incertitude (formule fournie) sur le volume versé avec cette burette est : $\boldsymbol{U(V) = \sqrt{2(U_{lecture})^2 + (U_{tolérance})^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{2\times 0{,}1}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{2\times 0{,}05}{\sqrt{12}}\right)^2}}$ = 0,1 mL

5) Évaluer une incertitude de répétabilité

Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois la mesure d'une même grandeur dans les mêmes conditions expérimentales, il peut trouver des résultats différents.
Il en est de même pour des opérateurs différents réalisant simultanément la mesure de la même grandeur avec du matériel similaire.
Dans de tels cas, on utilise des notions de statistiques (moyennes et écart type) pour analyser les résultats.

a) Moyenne et écart type

La moyenne des valeurs mesurées est la meilleure estimation qui puisse être faite.
Pour une série de n mesures indépendantes donnant des valeurs mesurées m_K , l'écart type de la série de mesures est : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(m_k - m_{moy})^2}{n-1}}$ *Où m_{moy} est la valeur moyenne de la série de mesures*

b) Incertitude de répétabilité

L'incertitude de répétabilité associée à la mesure est : $\boldsymbol{U = k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
Elle dépend du nombre de mesures indépendantes noté n, de l'écart type de la série de mesure et d'un coefficient appelé facteur d'élargissement noté k.

c) Facteur d'élargissement : k

Le facteur d'élargissement dépend du nombre de mesures réalisées et du niveau de confiance choisi. Sa valeur figure dans un tableau issu de la loi statistique dite « loi de Student »
Un extrait de ce tableau est donné ci-dessous pour un nombre de mesures compris entre 2 et 16, et pour des niveaux de confiance de 95 % et de 99 % :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$K_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13
$K_{99\%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,06	3,01	2,98	2,95

Ce tableau montre que :
✓ pour un même nombre de mesures, plus le niveau de confiance est grand et plus k est grand.
✓ pour un même niveau de confiance, plus le nombre n de mesures indépendantes est grand et plus k est petit.

Exemple :
La mesure de la durée Δt de chute d'un objet a été répétée 16 fois avec un chronomètre de qualité. Les résultats obtenus exprimés en seconde sont les suivants :

Δt (en s)	1,38	1,45	1,41	1,45	1,43	1,41	1,46	1,39	1,43	1,48	1,38	1,44	1,40	1,42	1,39	1,44

La série des valeurs mesurées des durées précédentes conduit à
- ✓ une valeur moyenne : $\boldsymbol{\Delta t_{moy} = 1{,}42s}$
- ✓ un écart type : $\boldsymbol{\sigma_{n-1} = 0{,}02965s}$
- ✓ l'incertitude de répétabilité : $\boldsymbol{U_{répétabilité}(\Delta t) = k \times \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}}$
  - ☞ avec un niveau de confiance de 95 %, l'incertitude de répétabilité est :
    $\boldsymbol{U_{répétabilité}(\Delta t) = 2{,}13 \times \frac{0{,}02965}{\sqrt{16}}}$=0,016s
  - ☞ avec un niveau de confiance de 99 %, l'incertitude de répétabilité est :
    $\boldsymbol{U_{répétabilité}(\Delta t) = 2{,}95 \times \frac{0{,}02965}{\sqrt{16}}}$=0,022s

III – EXPRESSION ET ACCEPTABILITE DU RESULTAT

1) Convention d'écriture pour l'expression du résultat

Le résultat de la mesure d'une grandeur notée M est un intervalle de confiance associé à un niveau de confiance. L'intervalle de confiance est centré sur la valeur m (valeur mesurée lors d'une mesure unique ou valeur moyenne des mesures lors d'une série de mesures) et a pour demi-largeur l'incertitude de mesure U(M).

Le résultat de la mesure s'écrit :M = $\boldsymbol{m \pm U(M)}$ si elle existe, l'unité est précisée.
Par convention, l'incertitude sera arrondie à la valeur supérieure avec pas plus de 2 chiffres significatifs et les derniers chiffres significatifs conservés pour la valeur mesurée m sont ceux sur lesquels porte l'incertitude U (M)

Exemple :

	Valeur mesurée m	Incertitude U(M)	Résultat de la mesure
Vitesse d'une moto	$57{,}925 m.s^{-1}$	$0{,}088\ m.s^{-1}$	V = 57,925$\pm$0,088
Charge électrique	$1{,}6042.10^{-19}C$	$0{,}0523.10^{-19}C$	$q = (1{,}604 \pm 0{,}053).10^{-19}C$

2) Acceptabilité du résultat

Lorsque l'incertitude relative est inférieure à 0,01, la mesure est alors considérée comme de bonne qualité.
Dans certains cas, la grandeur mesurée a une valeur déjà connue précisément considérée comme une valeur de référence. On peut alors calculer une incertitude relative alors appelée pourcentage d'erreur :

$$r = \frac{|V_{mesurée} - V_{référence}|}{V_{référence}} \times \mathbf{100}$$

Si le pourcentage d'erreur est inférieur à 10%, la mesure est alors considérée comme de bonne qualité.

IV – AMELIORATION DE LA QUALITE D'UNE MESURE

Quand l'incertitude relative est supérieure à 1 %, il faut chercher comment améliorer la qualité de la mesure effectuée :

- ✓ *le matériel choisi doit présenter une tolérance suffisamment faible ;*
- ✓ *le nombre de mesures indépendantes doit être suffisant ;*
- ✓ *lors de calculs successifs, il faut garder les résultats intermédiaires dans la mémoire de la calculatrice*
- ✓ *pour réduire l'erreur aléatoire, il faut reproduire la mesure afin de réduire l'influence des fluctuations à l'aide d'une moyenne ;*
- ✓ *pour réduire l'erreur systématique, il faut vérifier chaque étape de la mesure pour éliminer les biais.*