

1.1 Le paradoxe de Savage

19-11-2024

Frank Ramsey (1903-1930) un ami de Keynes est le premier à proposer une théorie subjective des probabilités affirmant qu'une mesure de probabilité reposant sur les convictions, les croyances, déduit sa grandeur à la fois des désirs (utilité subjective) et des croyances (probabilités subjectives). Elle n'est pas déterminée par une connaissance objective, impersonnelle, commune mais par un savoir-faire propre à chaque individu. La probabilité est donc une donnée éminemment subjective. Cette idée reprise par Bruno De Finetti et plus tard par

Leonard Savage (1954) qui exposera une dérivation complète des probabilités subjectives.

Le cadre de la théorie de Savage est de supposer que l'incertain peut être représenté par :

⇒ un ensemble d'état du monde S c'est-à-dire un ensemble d'événements mutuellement incompatibles. Prenant exemple de la course de chevaux. Chaque état du monde serait donc un classement possible des chevaux

⇒ à chaque état du monde possible correspond une conséquence. c'est-à-dire ici un prix noté x . L'ensemble des prix possibles forme l'ensemble des conséquences X . Dans ce contexte, formellement une course de chevaux h est pour le parieur une fonction qui à chaque état possible s associe un prix x . Son expression est donnée par : $h: S \rightarrow X$.

Une propriété fondamentale de ce cadre est que, si l'on est capable de se représenter les issues possibles de chaque course c'est-à-dire les états du monde, si l'on comprend parfaitement leurs conséquences, les prix, aucune probabilité n'apparaît : chacun est libre de se faire une croyance. Seul importe ici, que chacun soit capable quand on lui soumet deux paris sur une course possible ou deux courses, par exemple f et g , de ~~révéler~~ révéler s'il préfère strictement f à g , g à f ou s'il est indifférent.

On suppose donc que les agents ont des préférences bien définies sur les décisions à prendre représentées par un **pri-ordre complet**. Comme toute théorie, celle de Savage repose sur un **corps d'hypothèse**. Certaines sont techniquement assez similaires à celle de la théorie de l'utilité espérée à la VNM. Une hypothèse essentielle est **l'axiome de la chose sûre**, laquelle est dans ce contexte assez proche de **l'axiome d'indépendance** chez VNM.

Cet axiome clé du modèle de Savage qui en réalité est un **principe de cohérence des choix** postule qu'«une modification simultanée de la partie commune de deux actes ne renverse pas l'ordre de préférence entre ces deux actes». De plus, ce principe ne postule des variations de l'ordre de préférence qu'à **la seule modification d'une conséquence commune**. Il s'illustre ainsi qu'il suit

1^{ère} loterie : On vous propose deux options distinctes X et Y.

Option X : recevoir deux billets pour un match de football s'il ne pleut pas et 5000 F s'il pleut.

Option Y : recevoir deux billets pour un match de basket s'il ne pleut pas et 5000 F s'il pleut.

On vous pose la question de savoir quelle option préférez vous ?

2^e loterie: On vous propose deux options distinctes X' et Y' .

Option X' : recevoir deux billets pour un match de football s'il ne pleut pas et 0 F s'il pleut.

Option Y' : recevoir deux billets pour un match de basketball s'il ne pleut pas et 0 F s'il pleut.

Le principe de la chose sûre implique logiquement ici, que si $X \succ Y$ alors on devrait avoir $X' \succ Y'$ autrement dit votre préférence pour un match de football (ou de basketball) ne dépend pas du temps qu'il fait, ni de la somme d'argent que vous percevrez s'il pleut. Cela paraît évident, avec cette hypothèse fondamentale (et d'autres). Savage a montré que "pour tout préordre il existe une fonction u qui associe X l'ensemble X l'ensemble $\mathbb{R}$ " soit $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ et une probabilité π appartenant à $\Delta(S)$ définie sur S tel que pour tout couple (f, g) . Autrement dit, même si il n'existe pas de probabilité objective caractérisant les états du monde lorsque les préférences satisfont certaines propriétés

alors il est possible de représenter les préférences par indice d'utilité U en distinguant les préférences sur les conséquences représentées par la fonction u des croyances sur les états du monde résumé par la probabilité π . Cet axiome assure en effet, que seul les différences joueront c'est-à-dire les conséquences sur S sachant T ($S|T$) que ces différences joueront quel que soit les valeurs sur le complémentaire c'est-à-dire que l'on prenne $f(s)$ ou $f(s)$ sur T . Bien que séduisant par sa simplicité et sa relative souplesse d'utilisation comparée à d'autres approches, le modèle de l'utilité espérée dans l'incertain a fait l'objet de plusieurs critiques expérimentales. En fait, les axiomes de Savage conduisant ainsi à une espérance additive subjective d'utilité, la principale critique sera liée au principe de la chose sûre, lequel sera remis en cause par les expériences d'Ellsberg (1961).

1.2 - Le paradoxe d'Ellsberg (1961)

Une variance de préférence étant la règle qui doit être observée même lorsque la modification de la conséquence commune modifie le contexte de choix, Ellsberg montrera qu'un tel remplacement peut faire basculer un des actes

d'une situation d'ambiguïté à une situation de certitude ou de risque.

Expérience : on dit à un ensemble d'individus qu'une urne contient 300 boules soit 100 boules rouges (BR) et 200 boules bleues (BB) ou vertes (BV).

1^{ère} loterie :

Option A : recevoir 1000 F si la boule est rouge

Option B : recevoir 1000 F si la boule est bleue

En règle générale, il apparaît que la plupart des individus préfère A à B.

2^e loterie :

Option C : recevoir 1000 F si la boule n'est pas rouge

Option D : recevoir 1000 F si la boule n'est pas bleue

En règle générale, il apparaît que la plupart des individus préfèrent C à D.

Interprétation : Considérons les événements suivants :

Délégué Nsangou Mohamed

- $R =$ l'événement "la boule est rouge"
- $-R =$ l'événement "la boule n'est pas rouge"
- $B =$ l'événement "la boule est bleue"
- $-B =$ l'événement "la boule n'est pas bleue"

En utilisant les propriétés des probabilités on a :

$$P(R) = 1 - P(-R) \quad \text{et} \quad P(B) = 1 - P(-B)$$

Supposons que $U(0) = 0$, on a alors ce qui suit :

1- Dire que l'option A est préférée à B signifie que l'individu pense que :

$$P(R) U(1000) > P(-R) U(1000)$$

$$\Rightarrow P(R) > P(-R)$$

En somme, l'individu s'imagine qu'il a plus de chance de tomber sur une boule rouge qu'une boule bleue. Il se fait donc une idée subjective de la probabilité d'avoir une boule bleue

2- Dire que l'option C est préférée à B signifie que l'individu pense que :

$$P(-R) U(1000) > P(-B) U(1000)$$

$$\Rightarrow P(-R) > P(-B)$$

$$\Rightarrow 1 - P(R) > 1 - P(B)$$

$$\Rightarrow P(R) < P(B)$$

Comme on peut le constater en changeant la formulation du problème, il s'avère que l'idée subjective que l'individu se fait sur la probabilité d'avoir une boule bleue change. Ce constat paradoxal est connu sous le nom de **paradoxe d'Ellsberg**. Ainsi, tant dis que le **paradoxe d'Allais** remet en cause la fonction d'utilité de VNM, celui de **Daniel Ellsberg (1961)** met en cause le **modèle SEU de Savage** et la **représentation de l'information sous forme de probabilité**. En effet, cette dernière fait l'objet de **déformation** dans certains contextes. Ellsberg montre comment la nature de l'information disponible pour formuler les probabilités en incertitudes joue sur **la confiance** qu'ont les individus dans leur jugement et donc sur leur préférence. On retrouve ici, le rôle de la confiance dans le jugement souligné par **Knight et Keynes**.

Les réponses des joueurs s'expliquent ainsi : lors du premier choix, les joueurs connaissent la probabilité de tirer une boule rouge, celle de tirer une boule bleue peut prendre toutes les valeurs comprise dans l'intervalle **$[0, \frac{2}{3}]$** . Du fait du manque d'information pour formuler des probabilités, les joueurs préfèrent le premier pari. Dans le second cas, c'est la probabilité de tirer une boule rouge ou verte qui est connue donc c'est la dernière solution qui est préférée.

Avec ce test, Ellsberg conteste l'idée que les agents manquant d'information statistique pourraient toujours formuler correctement des probabilités subjectives. Son paradoxe remet en cause l'optimisme des économistes pour lesquels la distinction de Knight entre risque et incertitude n'était plus utile, le théoricien pouvant toujours poser que le raisonnement à partir de probabilité subjective est aussi rigoureux que si les probabilités sont objectives.

Ce paradoxe ouvre la voie à une nouvelle notion introduite par Ellsberg à savoir l'ambiguïté. L'ambiguïté une notion qui fait débat est définie ici de manière stricte comme l'incertitude sur les probabilités créée par un manque d'information pertinente alors que ces informations pourraient être connues (Frischer et Baron 1988). Dans une définition plus large, l'aversion à l'ambiguïté désigne la préférence des agents pour la chose probable et précise relativement à la chose vraisemblable (probable mais imprécise). Se pose en filigrane, la question de la représentation que se font les agents d'un environnement complexe. L'ambiguïté ouvre sur différents travaux qui vont des plus radicaux avec le refus d'utiliser les probabilités lorsque leur valeur est ignorée, au plus classique avec des modélisations parfois très proches de celles de l'utilité espérée. Ainsi, certains modèles

Intégrant un coefficient d'aversion à l'ambiguïté
de sorte que le modèle de l'utilité espérée
devient un cas particulier où ce coefficient est
nul (Lire les travaux de Viviani 1994 pour une
revue de littérature)