

12/12/2024.

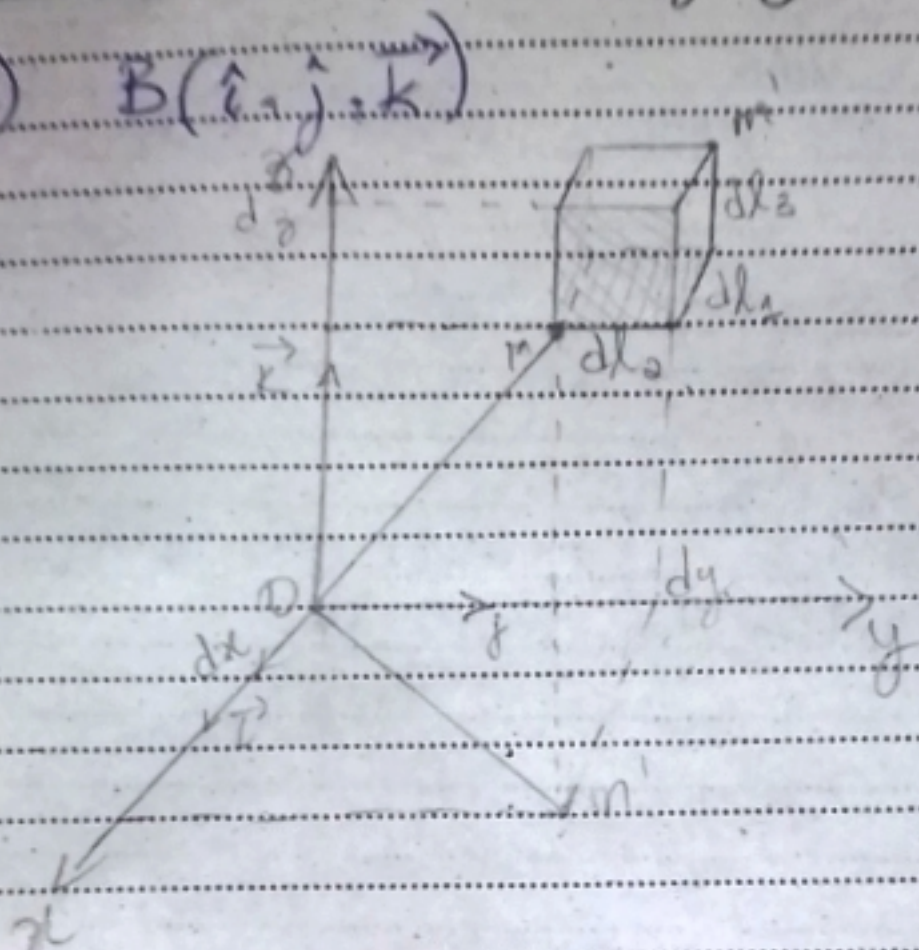
Rappel mathématiques

Chap I : Représentation d'un point M dans l'espace.

1 - Coordonnées

a) Coordonnées Cartésiennes (x, y, z) .

$$A(0, x, y, z) \quad B(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$$



• Vecteur position.

$$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Alors le vecteur élémentaire $d\vec{OM}$ est

$$d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\text{Car } \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

• Elements de longueurs.

Un déplacement élémentaire suivant l'axe de ox , oy et oz sont notés respectivement par ;

$$dl_1 = dx, \quad dl_2 = dy, \quad dl_3 = dz.$$

• Elements de surfaces

$$ds_1 = dx dy, \quad ds_2 = dx dz, \quad ds_3 = dy dz$$

FEUILLE DE COMPOSITION / Writing Paper

NB

Dans les coordonnées cartésiennes, pour avoir les éléments de surface, on multiplie deux à deux les éléments de longueur.

$$S = \int d\sigma$$

• Éléments de volume

- * À partir des éléments de surfaces, on peut déduire l'élément de volume.
- * À partir des éléments de longueurs, nous avons;

$$dv = dx dy dz$$

$$= d\sigma_1 dz$$

$$= dx d\sigma_3$$

$$= dy d\sigma_2$$

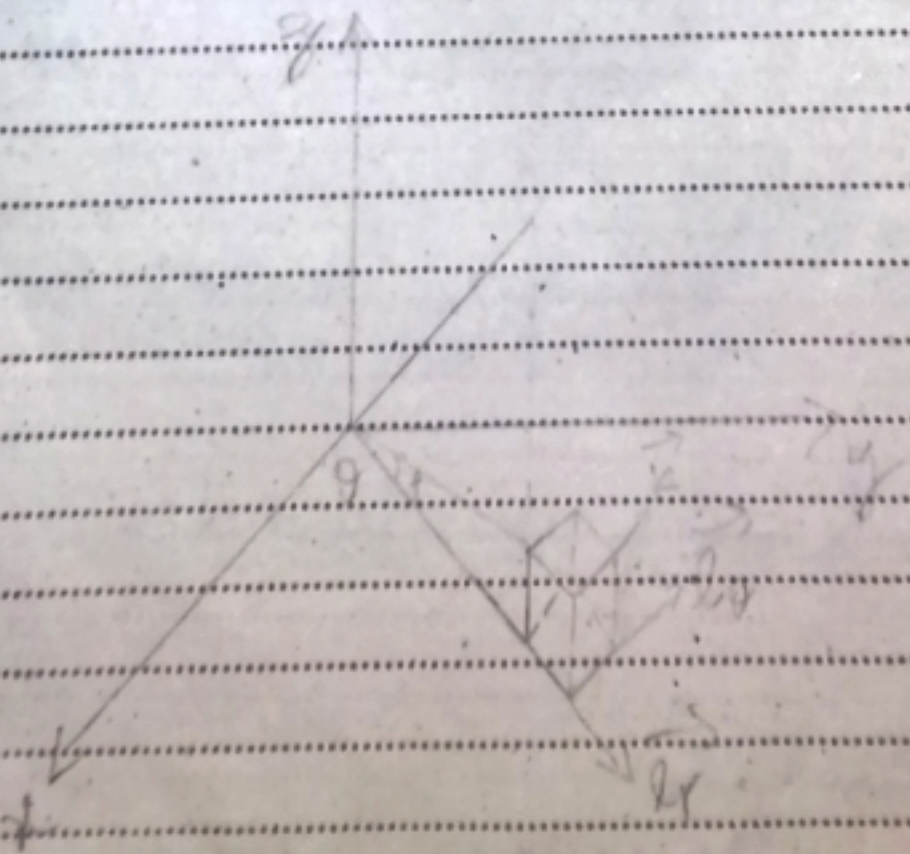
À partir des éléments de surface nous avons ça.

Ainsi donc,

$$V = \int dv$$

b) Coordonnées cylindrique (r, \theta, z)

• Vecteur position



On a:

$$\vec{OM} = \vec{rM} + \vec{OM}$$

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{k}$$

$$d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{k}$$

• Elements de longueurs.

Les els de longueurs sont les composantes de la dérivée du vecteur position dans la base $B(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

$$\Rightarrow dl_1 = dr \quad dl_2 = r d\theta \quad dl_3 = dz$$

• Elements de surfaces.

$$dl_1 dl_2 = ds_1 = r dr d\theta$$

$$dl_1 dl_3 = ds_2 = r d\theta dz$$

$$dl_2 dl_3 = ds_3 = dr dz$$

• Elements de volume.

$$dv = dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3$$

$$\Rightarrow dv = r dr d\theta dz = dr ds_1 = r d\theta ds_3 = dz ds_2$$

- Calculons le volume du cylindre.

$$0 < r < R \quad 0 < \theta < 2\pi \quad 0 < z < h$$

$$V_{\text{cyl}} = \int \int \int r dr d\theta dz = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

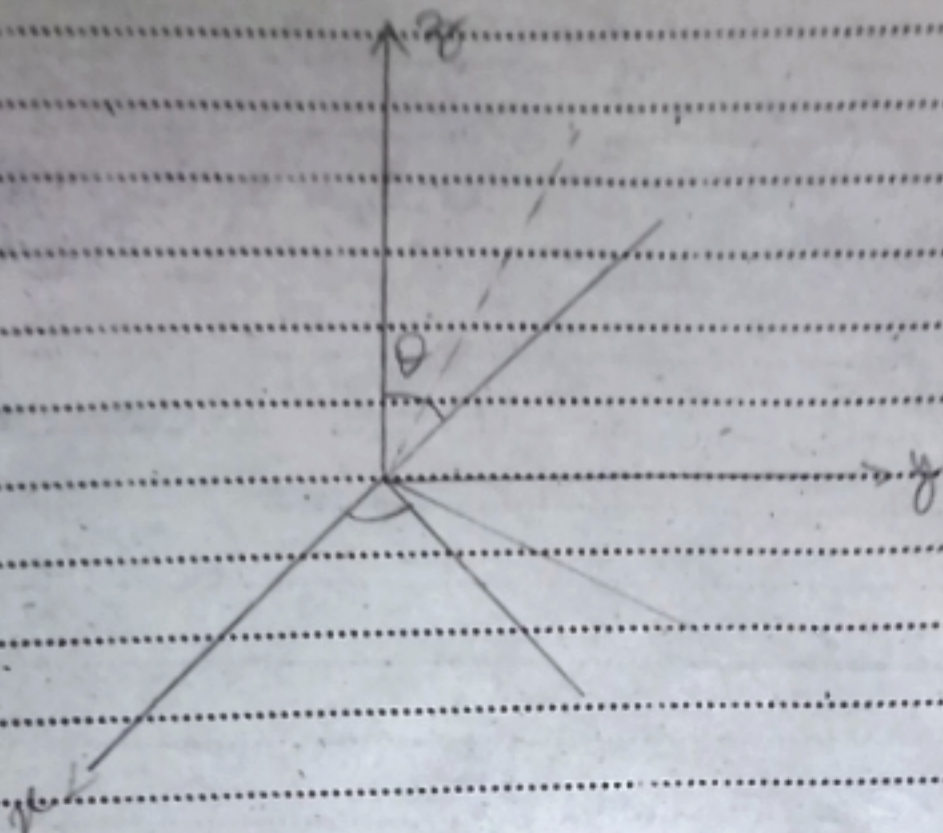
$$= \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R \left[\theta \right]_0^{2\pi} \left[z \right]_0^h$$

$$= \frac{R^2}{2} (2\pi) (h)$$

$$V_{\text{cylindre}} = \pi R^2 h$$

c) Coordonnées Sphériques (r, θ, φ)

• Vecteur position:



$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

aussi,

$$x = r \cos \varphi$$

$$r = \frac{x}{\cos \varphi}$$

$$y = r \sin \varphi$$

or

$$z = r \cos \theta$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

• Elements de longueur:

$$dl_1 = dr$$

$$dl_2 = r d\theta$$

$$dl_3 = r d\varphi = r \sin \theta d\varphi$$

Alors, $d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

• Elements de surfaces:

$$dl_1 \times dl_2 \rightarrow dS_1 = r dr d\theta$$

$$dl_2 \times dl_3 \rightarrow dS_2 = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dl_1 \times dl_3 \rightarrow dS_3 = r \sin \theta dr d\varphi$$

• Element de volume

$$dv = dl_1 \times dl_2 \times dl_3$$

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Alors :

$$V = \int_V dv$$

• Volume de sphere

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < r < R$$

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$V_{\text{sphere}} = \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \left[\varphi \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{R^3}{3} (-\cos \pi + \cos 0) (2\pi)$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$V_{\text{sphere}} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

2. Vecteurs $R(x, y, z)$

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

• Somme de 2 vecteurs

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$\vec{V}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\vec{V} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} + (z_1 + z_2) \vec{k}$$

• Produit scalaire

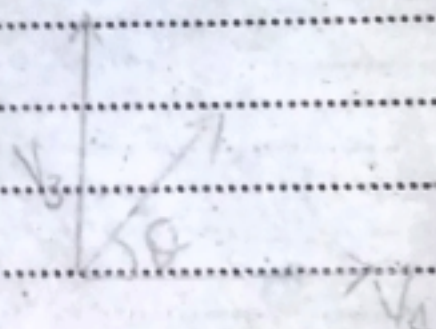
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cos \theta$$

• Produit vectoriel de deux vecteurs

$$\|\vec{V}_3\| = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \sin \theta$$

• Circulation d'un vecteur

$$dC(v) = \vec{V} \cdot d\vec{l} = V \cdot dl$$

$$dC(v) = \|\vec{V}\| \|dl\| \cos \alpha$$

$$C(v) = \int_A^B dC(v) = \int_A^B V \cdot dl$$

$V = \text{cte}$

$$C(V) = \int_A^B V d\ell = \vec{V} \int_A^B d\ell$$

$$\vec{V} = \vec{F} \quad C(V) = \int_A^B \vec{F} d\vec{\ell} = \omega(F)_{A \rightarrow B}$$

$$C(V) = \oint \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

• Coordonnées Cartesienne

$$\vec{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$d\vec{\ell} = dM = d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$dC(V) = \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

$$dC(V) = V_x dx + V_y dy + V_z dz$$

• Coordonnées cylindrique

$$\vec{V} \begin{pmatrix} V_\rho \\ V_\theta \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$d\vec{\ell} = d\vec{OM} \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\theta \\ dz \end{pmatrix}$$

$$dC(V) = V_\rho d\rho + V_\theta \rho d\theta + V_z dz$$

• Coordonnées sphérique

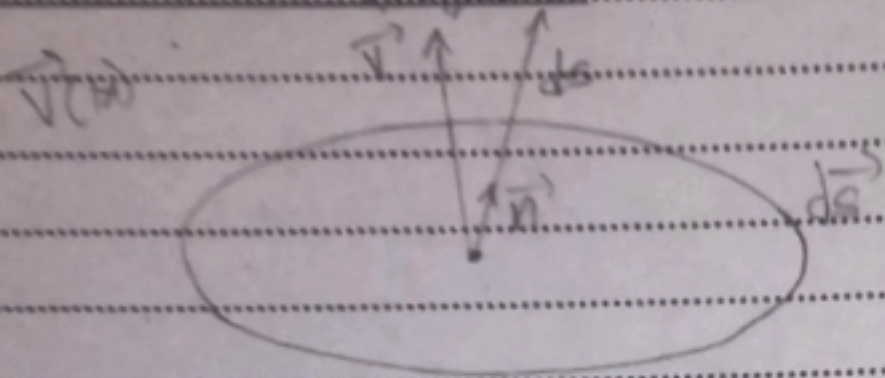
$$\vec{V} \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{pmatrix}$$

$$d\vec{\ell} = d\vec{OM} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin\theta d\varphi \end{pmatrix}$$

$$dC(V) = V_r dr + V_\theta r d\theta + V_\varphi r \sin\theta d\varphi$$

• Flux d'un vecteur

Flux d'un vecteur.



$$d\phi = \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad \text{or} \quad d\phi = \vec{V} \cdot \vec{n} ds$$

• Coordonnées cartésiennes

$$\phi = \iint_S d\phi = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} ds$$

Ex: $\vec{V}(M) = 4xz\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$

($x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$). Calculons le flux du champ de ce vecteur.

Solution