ANALYSE DE LA DROITE REEL

MAT1072: MATHEMATIQUES POUR INFORMATICIENS

Par :

Dr. JOSEPH MBANG

1er juin 2020

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Ensemble des nombres rationnels

1.1.1 Ecriture décimale

Par définition, l'ensemble des nombres rationnels est

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\} \text{on note}\, \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$

On a bien $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Par exemple $\frac{2}{5}, -\frac{7}{10}, \cdots, \frac{1}{2}$
Les nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$; et $n \in \mathbb{N}$, fournissent d'autres exemples.$1,234 = 1234 \times 10^{-3} = \frac{1234}{10^3}$; $0,00345 = 345 \times 10^{-5} = \frac{345}{10^5}$

Proposition 1.1. *Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture périodique ou finie.*

Exemple $\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{1}{3}$; $1,179325325325325$

$$\begin{aligned}
12,34202120212021 &= x \\
100x &= 1234,20212021 \\
10^4 \times 100x &= 12342021,20212021 \\
10^4 \times 100x - 100x &= 12342021 - 1234 \\
\Longrightarrow 999900x &= 12340787 \\
\Longrightarrow x &= \frac{12340787}{999900}
\end{aligned}$$

Proposition 1.2. *$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ; c'est-à-dire $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Alors il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ c'est-à-dire $p \wedge q = 1$

$\Longrightarrow 2 = \dfrac{p}{q} \Longrightarrow 2q^2 = p^2 \Longrightarrow p^2$ est un nombre entier pair c'est-à-dire $2 \,\text{divise}\, p^2$. Mais 2 divise p^2 alors 2 divise p. Donc il existe un entier $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p'$. Par suite de l'egalité $2q^2 = p^2$ on a $2q^2 = 4p'^2$. donc $q^2 = 2p'^2$. Ceci entraine que 2 divise q^2 par conséquent 2 divise q. Nous avons prouvé que 2 divise à la fois p et q. Ceci est absude car p et q sont premiers entre-eux. D'où $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$ $\square$

1.2 Nombres réels

On dit que $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$. Ce pendant, nous savons que $\sqrt{2}$ peut s'écrire peut s'écrire sous forme d'un développement décimel infini. $\sqrt{2} = 1,1421356\cdots$

Dans ce cours, nous prenons cette présentation décimale, comme définition d'un nombre réel.

Définition 1.1. *Un nombrs réel est une connexion de chiffres $c_0c_1c_3\cdots c_n$ et $d_1d_2d_3\cdots d_n$ compris entre 0 et 9. Les chiffres d_i pouvant être en infini. On fait correspondre à cette connexion **un nombre doué** par le développement décimal $x = c_mc_{m-1}\cdots c_1c_0, d_1d_2\cdots d_n$*

— s'il y a un nombre fini de décimal d_i ($d_i \neq 0$) alors le nombre le nombre $x \in \overline{Q}$ et $x = c_m10^m + c_{m-1}10^{m-1} + \cdots c_010^0 + d_110^{-1} + \cdots d_n10^{-n}$ ($x \in \mathbb{Q}$ comme somme des rationnels)

— Un nombre rationnel admet un développement décimal, donc c'est un réel

Théorème 1.1. *Un nombre réel est un rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Remarque 1.1. *Cette défition nous suffit pour ce cours, mais elle n'est pas satisfaisantes car un nombre réel peut avoir deux développement décimaux distincts $1 \cong 0,9999999\cdots$*

— *cette définition fait reférence aux nombres 10 qui peut prendre une autre base d'énumération. ce qui donnerait une définition équivavenle d'un nombre réel*

— *Les opérations d'addition, multiplication ne sont pas faites à cause du problème de retenu*

— *Il est impossible de définir le nombre π rigoureusement*

Il faudrait un temps et espace et un espace infini pour calculer toutes les décimales de π

1.2.1 Ordre dans $\mathbb{R}$

Nous allons voir que les réels sont ordonnés. La notion d'ordre est générale et nous allons définir cette notion sur un ensemble quelconque. Nous allons noter $\leqslant$ la relation d'ordre.

Définition 1.2. *1. Une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de l'ensemble de l'ensemble produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ pour dire que $(x, y) \in \mathbb{R}$*

2. Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si
- *$\mathcal{R}$ est reflexive, pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x\mathcal{R}x$*
- *$\mathcal{R}$ est antisymétrique, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$; ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) $\Longrightarrow$ ($x\mathcal{R}y$)*
- *$\mathcal{R}$ est transitive, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$; ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) $\Longrightarrow$ ($x\mathcal{R}z$)*

Définition 1.3. *Une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est totale si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$*
On dit aussi que $(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

Propriété 1.1. *La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre et de plus elle est totale. Nous avons donc*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$*
- *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors $x = y$*
- *Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$*

1.2.2 Propriété d'Archimède

Propriété 1.2. $\mathbb{R}$ *est archimédien, c'est-´a-dire pour tout réel x, il existe un entier naturel n strictement plus grand que x. Cette propriété peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel.*

Proposition 1.3. *Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif, la partie entière notée $E(x)$ et que $x - 1 < E(x) \leqslant x$ ou $E(x) \leqslant x \leqslant E(x) + 1$*

Exemple : $E(2, 853) = 2$, $E(\pi) = 3$; $E(-3, 50 = -4$

Démonstration. **Existence :** Supposons $x \geqslant 0$, par la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$. L'ensemble $K = \left\{k \in \mathbb{N}; k \leqslant x\right\}$ est donc fini (car pour tout k dans K, on a $k < n$). Il admet donc un plus grand élément $k_{max} = maxk$. On a alors $k_{max} \leqslant x$ car $k_{max} \in K$, et $k_{max} + 1 > x$ car $k_{max} + 1 \neq K$. Donc $k_{max} \leqslant x < k_{max} + 1$ et on premd donc $E(x) = k_{max}$
Unicité si k et l sont deux entiers vérifiant $k \leqslant x < k + 1$ et $l \leqslant x < l + 1$ donc par transitivité $k < l + 1$. en échangeant les rôles de k et l, ona aussi $l < k + 1$. On conclut que $l - 1 < k < l + 1$, mais il n'y a qu'un seul entier compris strictement entre l et $l + 1$; c'est l. Ainsi $k = l$ $\square$

1.3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

1.3.1 Intervalle

Définition 1.4. *Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété* $\forall a, b \in I, |, \forall x \in \mathbb{R}\, (a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in I)$

Remarque 1.2.
— *Par définition $I = \emptyset$ est un intervalle*
— *$I = \mathbb{R}$ est aussi un intervalle*

Définition 1.5. *Soit $a \in \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$*

1.3.2 Densité

Théorème 1.2.
1. *$\mathbb{Q}$ est dense danse $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.*
2. *$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels*

Démonstration.
1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire
$\forall a, b \in \mathbb{R}\, a < b \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} a < x < b.$ $(*)$ D'après la propriété d'Arcgimède, il existe un entier q tel que $q > \dfrac{1}{b-a}$. Comme $b - a > 0$, on a $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $p = E(aq) + 1$. alors $p - 1 \leqslant aq \leqslant p$. On en déduit d'und part $a < \dfrac{p}{q}$ et d'autre part $\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{q} \leqslant a$ donc $\dfrac{p}{q} \leqslant a + \dfrac{1}{q} < a + b - a = b$. Donc $\dfrac{p}{q} \in]a, b[$. Ceci achève la démonstration.
2. Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$contient un irrationnel.
Partant de a, b réels tels que $a < b$, on peut appliquer l'implication de l'affirmation $(*)$ au couple $(a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2})$. on en déduit qu'il existe un rationnel r dans l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$ et par translation $r + \sqrt{2} \in]a, b[$. Or $r + \sqrt{2}$ estirrationnel, car sinon comme les rationnels sont stables par somme $\sqrt{2} = -r + r + \sqrt{2}$ serait rationnel, ce qui est faut d'après la proposition $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.On a donc montré que si $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ contient aussi un irrationnnel.
3. Tout intervalle contient une infinité de rationnels et d'irrationnels. On va déduire de l'existence d'un rationnel et d'un irrationneldans tout intervalle $]a, b[$, le fait qu'il existe une infinité de chaque dans un tel intervalle ouvert.
En effet, pour tout entier $N \geqslant 1$, on considère l'ensemble de N sous-intervalles ouverts $\left]a, a + \dfrac{b-a}{N}\right[, \left]a + \dfrac{b-a}{N}, 2\dfrac{b-a}{N}\right[, \cdots \left]\dfrac{(N-1)(b-a)}{N}, b\right[$. Chaque sous-intervalle contient un rationnel et un irrationnel$>$. Donc $]a, b[$ contient (au moins)

N rationnels irrationnels. Comme ceci est vrai pour tout entier $N \leqslant 1$, l'intervalle ouvert $]a, b[$ contient alors une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

$\square$

1.4 Borne supérieure et borne inférieure

1.4.1 Borne supérieure

1.4.1.1 Maximum, minimum

Définition 1.6. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel α est* ***le plus grand élément*** *de A si , $\alpha \in A$ et $\forall x \in A$; $x \leqslant \alpha$*
S'il existe, le plus grand élément est unique, on note alors $\max A$
Le plus petit élément *de A noté* $\min A$, *s'il existe est le réel β tel que $\beta \in A$ et $\forall x \in A; x \geqslant \beta$.*
Le plus grand élément s'appelle aussi le ***maximum*** *et le plus petit élément, le* ***minimum****.*

Exemple : $\max[a, b] = b$ et $\min[a, b] = a$. L'intervalle $]a, b[$ n'a pas de plus petit et de plus grang élément.
$\min[0, 1[= 0$ mais $\max[0, 1[$ n'existe pas.
Exemple d'application. Montrer que $A = \left\{1 - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ n'a pas de plus grang élément et que $\min A = 0$
Supposons que A a un plus grand élément $\alpha = \max A$. On aurait alors $U_n \leqslant \alpha$ avec $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour tout U_n. Ainsi $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \alpha$ donc $\alpha \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$. À la limite lorsque $n \to +\infty$ cela implique $\alpha \geqslant 1$. Comme α est le plus grand élément de A alors $\alpha \in A$.
Donc il existe n_0 tel que $\alpha = U_{n_0}$. Mais alors $\alpha = 1 - \dfrac{1}{n_0} < 1$. Ce qui est en contradiction avec $\alpha \geqslant 1$. Donc A n'a pas de maximum.
$\min A = 0$ il y a deux choses à vérifier tout d'abord pour $n = 1$ $U_1 = 0$ donc $0 \in A$. Ensuite pour tout $n \geqslant 1$ $U_n \geqslant 0$. Ainsi $\min A = 0$

1.4.1.2 Majorants, monorants

Définition 1.7. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel M est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leqslant M$*
Un réel m est un mainorant de A si $\forall x \in A, x \geqslant m$.

Exem[ple : 3 est un majorant de $]0, 2[$; $-7, -3$ sont des minorants de $]0, = \infty[$, mais il n' y a pas de majorant.

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe, on dit que A est majoré (resp. minoré).

Exemple : soit $A = [0, 1[$ l'ensemble des minorants de A est $] - \infty, 0[$ et l'ensemble des majorants est $[1, +\infty[$

Définition 1.8. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.*

1. *α est la borne supérieure A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note* $\sup A$
2. *β est la borne inférieure de A si β est un minorant de A et c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note* $\inf A$

Exemple : $\sup[a, b] = b$ $\inf[a, b] = a$. $\sup]a, b[= b$ $]0, +\infty[$ n' a pas de borne supérieure $\inf]0, +\infty] = 0$.

Théorème 1.3. *1. Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée admet une borne supérieure.*

2. Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée admet une borne inférieure.

Proposition 1.4. ***Caractérisation de la borne supéreure***
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ *tel que*

(i) *si $x \in A$, alors* $x \leqslant \sup A = \alpha$

(ii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$, *tel que* $x_\epsilon > \alpha - \epsilon$

Proposition 1.5. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel* $\sup A$ *tel que*

(i) $\sup A$ *est un majorant de A*

(ii) *il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers* $\sup A$

Proposition 1.6. ***Caractérisation de la inférieure***
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. La borne inférieure de A est l'unique réel $\inf A$ *tel que ;*

(i) *si $x \in A$, alors* $x \geqslant \sup A = \beta$

(ii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$ *tel que* $x_\epsilon > \beta + \epsilon$

1.5 Suites Numériques

Définition 1.9. *Une suite de nombre réels est une application $u; \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ et on l'appelle n-ième terme général de la suite et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}^*$

1.5.1 Suites récurentes

a) La suite de Fibonacci est définie par $U_0 = U_1 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Plus généralement, on peut définir les suites récurrentes linéaire du second ordre par $U_{n+1} = a\,U_n + b\,U_{n-1}$ $(a, b \in \mathbb{R}.)$

Dans la résolution, léquation caractéristique est donnée par $r^2 - ar + b = 0\,(*)$. $\Delta = a^2 - 4b$

- si $\Delta > 0$, $U_n = Ar_1^n + Br_2^n$ $\quad r_1, r_2$ sont racines de $(*)$
- si $\Delta = 0$, $U_n = (An + B)r_0^n$ $\quad r_0$ est racine double de $(*)$
- si $\Delta < 0$, $U_n = (A\cos n\theta + B\sin n\theta)r^n$, $\alpha = re^{i\theta}$ solution complexe de $(*)$

c) **Les suites arithmétiques** sont définies par $U_{n+1} = U_n + r$ où $r \in \mathbb{R}$ est la raison $U_n = U_{n_0} + (n - n_0)r$. U_{n_0} étant le premier terme de la suite.

La somme $S_p = U_{n_0} + \cdots U_p = \dfrac{U_p + U_{n_0}}{2}(p - n_0 + 1)$

d) **Les suites géométiques** sont définies par $V_{n+1} = qV_n$ où $q \in \mathbb{R}$ est la raison. On montre que $V_p = q^{p-n_0}V_{n_0}$

La somme $S_p = V_{n_0} + \cdots V_p = V_{n_0}\dfrac{1 - q^{p-n_0+1}}{1 - q}$

Plus gééralement, on peut définir (U_n) par $U_{n+1} = f(U_0)$ où f est une application.

1.5.2 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 1.10. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite ;*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée si,* $\exists M \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}; u_n \leqslant M$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée si,* $\exists m \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}; u_n \geqslant m$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si elle est majorée et minorée c'est-à-dire* $\exists M \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}; |u_n| \leqslant M$ *où* $\exists M, m \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}; m \leqslant u_n \leqslant M$

1.5.3 Sens de variation

Définition 1.11. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite ;*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$

Remarque 1.3. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à termes strictement positifs, elle est croissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{U_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est périodique si et seulement si* $\exists p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+p} = u_n$

1.5.4 Limites

1.5.4.1 Limite finie, limite infinie

Définition 1.12. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ;*
la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - l| \leqslant \epsilon$ c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \epsilon$$

Définition 1.13. *1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si*

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant -A$$

Définition 1.14. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon.*

Proposition 1.7. *Si une suite est convergente, sa limite est unique.*

Démonstration. Par l'absurde
Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers deux limites $\neq l'$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \dfrac{|l - l'|}{2}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \quad , \exists N_1$ tel que $\forall n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon$
De même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l' \quad , \exists N_2$ tel que $\forall n \geqslant N_2 \Longrightarrow |u_n - l'| < \epsilon$
Notons $N = \max(N_1, N_2)$ on a alors pour ce N, $|u_N - l| < \epsilon$ et $|u_N - l'| < \epsilon$.
Donc $|l - l'| = |l - u_n + u_n - l' \leqslant |l - u_n| + |u_n - l'|$. Ceci implique $|l - l'| \leqslant \epsilon + \epsilon = 2\epsilon < |l - l'|$. C'est-à-dire que $|l - l'| < |l - l'|$, ce qui est impossible. Donc $l = l'$ □

1.5.4.2. Propriétés des limites

Proposition 1.8. *1.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$

Proposition 1.9. ***Opérations sur les limites***

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, où $l \in \mathbb{R}$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, où $l, l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l + l'$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = l \times l'$.*

3. $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$; *où* $l \in \mathbb{R}^*$, *alors* $u_n \neq 0$ *pour* n *assez-grand et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$

Proposition 1.10. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers le réel l. pour $\epsilon = 1$, $\exists N$; $\forall n > N$ $|u_n - l| \leqslant 1$. donc pour $n \geqslant N$ on a $|u_n| = |l + (u_n - l)| \leqslant |l| + |u_n - l| \leqslant |l| + 1$. Donc si on pose $M = \max(|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}, |l| + 1)$ on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leqslant M$ □

Proposition 1.11. *Si une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es bornée et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, *alors* $\lim_{m\to+\infty} (u_\times v_n) = 0$,

Démonstration. Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée c'est-à-dire $\exists M > 0; \forall n \in \mathbb{N}\,|u_n| \leqslant M$. Fixons $\epsilon > 0$ $\lim_{m\to+\infty} v_n = 0$, c'est-à-dire $\forall \epsilon' = \frac{\epsilon}{M} > 0$; $\exists N > 0$; $\forall n \geqslant N$, $|v_n| \leqslant \epsilon' = \frac{\epsilon}{M}$.
Mais pour $n \geqslant N$, on a $|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leqslant M \times \epsilon' = \epsilon$
On a montré que $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = 0$.

□

Exemple : prendre $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

1.5.4.3 Limite et inégalités

Proposition 1.12. 1. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$

2. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

3. *Théorème des " gendarmes". Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont trois suite telles que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ $\lim_{n\to+\infty} w_n$, *alors la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$

Théorème 1.4. *Toute suite croissante et majorée converge. toute suite décroissante et minorée converge.*

Démonstration. Notons $A = \{U_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, disons par le réel M, l'ensemble A est majorée par M et de plus il est non vide. Donc l'ensemble A admet une borne supérieure. Notons le $l = \sup A$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Soit $\epsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément u_N de A tel que $l - \epsilon < u_N \leqslant l$ et donc $|u_n - l| \leqslant \epsilon$ □

1.6 Suites adjacentes

Définition 1.15. *Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont dites adjacentes si :*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante*
2. $\forall n \geqslant 0$ *, on a* $u_n \leqslant v_n$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0.$

Théorème 1.5. *Si les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes, elles convergent vers la même limite*

Exemple : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}$

1.6.1 Théorème de Bolzano-Weierstass

Définition 1.16. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Une suite extraite ou sou-suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de la forme* $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *est une application croissante.*

Proposition 1.13. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$*, alors toute suite extraite* $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = l$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, d'après la définition de la limite, il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon$. Comme ϕ est strictement croissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}\, \phi(n0 \geqslant n$. Ceci implique en particulier que si $n \geqslant N$ alors $\phi(n) \geqslant N$ et donc $u_{\phi(n)} - l| < \epsilon$ $\square$

Théorème 1.6. ***Théorème de Bolzano-Weierstrass***
Toute suite bornée admet une sous-suite convergente

Démonstration. L'ensemble des valeurs de la suite est par hypothèse contenu dans un intervalle $[a, b]$. posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$, $\phi(0) = 0$. Au moins l'un des intervalles $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ contient u_n. Pour une infinité d'indices n. On note $[a_1, b_1]$ un tel intervalle, et on note $\phi(1)$ un entier tel que $\phi(1) > \phi(0)$ tel que $u_{\phi(1)} \in [a_1, b_1]$ En itérant cette construction, on construit $\forall n \in \mathbb{N}$ un intervalle $[a_n, b_n]$ de longueur $\frac{b-a}{2^n}$ et un entier $\phi(n)$ tel que $u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n]$
Notons par construction la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergent vers une même limite l. On peut appliquer le théorème "des gendarmes" $\square$

1.7 Suite de Cauchy

Définition 1.17. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite de cauchy si*

$$\forall\epsilon > 0,\, \exists N = N_\epsilon; (\forall n > N,\, \forall m > N) \Longrightarrow |u_n - u_m| < \epsilon$$

Il s'agit donc d'une suite dont les termse sont infiniment proches les uns les autres quand l'indice croît indéfiniment.

Proposition 1.14. *Toute suite de cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cauchy. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il suffit donc de chercher donc de chercher $M > 0\,;\, |u_n| < M,\, \forall n \in \mathbb{N}$
Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de cauchy,

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall m,\, n \in \mathbb{N},\ m \geqslant N,\, n \geqslant N\ \Longrightarrow |u_m - u_n| < 1 \text{ avec } \epsilon = 1.$$

$$\begin{aligned} |u_n| - |u_m| &\leqslant |u_n - u_m| \\ \Longrightarrow |u_n| &< |u_m| + 1 \quad \text{posons} \quad n = m \\ \Longrightarrow |u_n| &< |u_N| + 1 \end{aligned}$$

Posons $M = \max\left\{u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}, |u_N| + 1\right\}$.
On obtient $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| < M$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Chapitre 2

FONCTIONS NUMERIQUES

2.1 LIMITES,CONTINUITE ET DERIVABILITE

2.1.1 Limite finie d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$

Définition 2.1. *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe b, $c \in \mathbb{R}$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$.On dit que l est limite de f en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que : $x \in D$; $x \neq a$; $|x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - l| \leqslant \epsilon$*

Notation : Si l est la limite de f en a, on note $l = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$

Remarque 2.1. ***(Unicité de la limite)***
Lorsque la limite d'une fonction en un point existe, elle est unique.

Définition 2.2. *: **(limite finie à droite (ou à gauche) en un point de $\mathbb{R}$)***
Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$,

1. *On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $a < c$ et $D \supset]a, c[$. On dit que l est une limite à droite de f en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$x \in D,\ a < x \leqslant a + \alpha \implies |f(x) - l| \leqslant \epsilon$$

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow \overset{>}{a}} f(x) = l$

2. *On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < a$ et $D \subset]b, a[$. On dit que l est la limite à gauche de f en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$x \in D,\ a - \alpha \leqslant x < a \implies |f(x) - l| \leqslant \epsilon$$

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow \overset{<}{a}} f(x) = l$

2.1.2 Limites des fonctions usuelles

Les fonctions suivantes tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f(x) = x \; ; x^2 \; ; x^n \; (n \geqslant 1) \; ; \sqrt{x}$$

Les fonctions suivantes tendent vers 0 lorsque x tend vers ∞ :

$$f(x) = \frac{1}{x} \; ; \frac{1}{x^n}(n \geqslant 1); \; \frac{1}{\sqrt{x^n}}$$

Les fonctions suivantes tendent vers 0 lorsque x tend vers 0 :

$$f(x) = x \; ; x^n \; ; sinx; \; xsinx$$

Exercice Déterminer les limites des fonctions suivantes :
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{sinx\,(1 - cosx)}{4x^3}$; $\quad lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - cosx}{x}$

Propriété 2.1. *Soient f et u des fonctions définies sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ Si, pour tout réel x assez grand, on a $|f(x) - l| \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = l$*

Propriété 2.2. ***(Théorème de comparaison)***
Soient f, u et v des fonctions admettant des limites en un réel a.
Si pour tout réel x assez proche de a, on a $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} v(x) = l$; alors la fonction f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$.

C'est le Théorème des "gendarmes" Ce Théorème s'étend aux limites en $-\infty$ et en $+\infty$

Exemple
Soit $f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}$. Etudier la limite de f en $+\infty$
Posons $u(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $v(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Comme, pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, on a, pour tout réel x, $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, or $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} v(x) = 1$, donc f admet une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Théorème 2.1. ***(Théorème de L'Hospital)***
Soient f, et g deux fonctions dérivables en un point x_0 telles $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

En général si f et g sont deux fonctions dérivables au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Théorème 2.2. *Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a,+\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$*

- *Si pour tout réel x assez grand on a, $f(x) \geqslant u(x)$et si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} u(x) = +\infty$, alors f admet une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$*
- *Si pour tout réel x assez grand on a, $f(x) \leqslant v(x)$et si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} v(x) = -\infty$, alors f admet une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$*

Théorème analogue pour les limites en $-\infty$ et en a

Théorème 2.3. ***(Théorème de compatibilité avec l'ordre)***
Si pour tout réel$x$ d'un intervalle du type $]a,+\infty[$, on a :

- *$f(x) \leqslant g(x)$*
- *Les fonctions f et g ont chacune une limite en $+\infty$. Alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x)$*

Ce Théorème s'étend aux limites en $-\infty$ ou en un point a

Théorème 2.4. ***(Théorème d'une fonction composée)*** *Soient f, g et h trois fonctions telles que $f = g \circ h$. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{X \longrightarrow b} g(X) = c$ alors*
$\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(h(x)) = c$
(Les lettres a, b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$).

Exemple

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $f$définie (sur $\mathbb{R}$) par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Posons $X = h(x)$ avec $h(x) = x^2 + x + 1$, ainsi $f(x) = \sqrt{h(x)}$. Nous savons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2.2 Continuité - Prolongement par Continuité

Définition 2.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel de I.*
On dit que f est continue en a si f admet une limite finie en a égale à $f(a)$.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point a de I.

Remarque 2.2. *Graphiquement, la Continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que sa représentation graphique sur I est d'un seul morceau. La notion de Continuité sur I n'a pas de sens si I n'est pas un intervalle.*

Définition 2.4. *Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit f une fonction définie sur I sauf en a admettant une limite finie l en a. La fonction $\bar{f}$ définie par :*

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x) \ \text{ si } x \neq a \\ \bar{f}(x) = l \ \text{ si } x = a \end{cases}$$

est appelée prolongement par Continuité de f en a.

Remarque 2.3. — *Les fonctions f et $\bar{f}$ n'ont pas le même ensemble de définition : f n'est pas définie en a, mais $\bar{f}$ l'est.*
— *La fonction $\bar{f}$ est définie et continue en a*

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ admet un prolongement par continuité en $x = 0$

2.2.1 Image d'un intervalle par une fonction continue

Définition 2.5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. L'image de I, notée $f(I)$, est l'ensemble de tous les nombres $f(x)$ où $x \in I$.*

Théorème 2.5. *Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.*

Si de plus f est monotone sur I, on a le tableau suivant :

$I =$	$[a, b]$	$[a, b[$	$]a, b]$	$]a, b[$
Pour f croissante	$[f(a), f(b)]$	$[f(a), \lim\limits_{b} f[$	$]\lim\limits_{a} f, f(b)]$	$]\lim\limits_{a}, \lim\limits_{b} f[$
Pour f décroissante	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim\limits_{a} f[$	$]\lim\limits_{b} f, f(a)]$	$]\lim\limits_{b} f, \lim\limits_{a} f[$

Théorème 2.6. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$. Alors, pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.
(Autrement dit, l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans I) - Si de plus f est monotone sur I, c existe et est unique.

Corollaire 2.1. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$*
Si $f(a)f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

Théorème 2.7. ***(Théorème du point fixe)***
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.
Si $f(I) \subset I$, alors f admet (au moins) un point fixe sur I. (Il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$)

Théorème 2.8. *Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé borné I, alors $f(I)$ est un intervalle fermé borné.*

Corollaire 2.2. *Si f est continue sur un intervalle fermé borné sur I, alors f est bornée sur I et atteint ses bornes.*

2.3 DERIVATION

Définition 2.6. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un élément de I (distinct des bornes de I). f est dérivable en a si*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est fini. Dans ce cas la limite de ce quotient est alors $f'(a)$ et est appelée nombre dérivée de f en a :

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

De manière évidente en posant $x = a+h$, f est dérivable en a si $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est fini et $f'(a) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

2.3.1 Interprétation géométrique

Si la fonction f admet un nombre dérivé $f'(a)$ en a, sa représentation graphique admet au point $A(a, f(a))$ une tangente et la pente de la tangente est $f'(a)$. l'équation de la tangente en A est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

2.3.2 Nombre ddérivée à gauche, nombre dérivée à droite

Il arrive parfois que $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existent et soient finies, mais différentes, ou que seule une des deux existe et soit finie par extension on note

$$f'_g(a) = \lim_{x \longrightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ et } f'_d(a) = \lim_{x \longrightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont finies mais $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, nous dirons alors que f admet une demi-tangente à gauche de A et une demi-tangente à droite de A, le point A est dit anguleux.

exemple

La fonction $f(x) = |x|$ admet un point anguleux en $x = 0$. ($f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$)

Théorème 2.9. *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple : La fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0

2.3.3 Dérivation sur un intervalle

Définition 2.7. *Si la fonction f est dérivable en tout point d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors on dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I .*
- La fonction f est dérivable sur l'intervalle I . La fonction dérivée de f est notéef$'$.

2.3.4 Opérations sur les dérivées

k est un nombre réell et n un entier naturel non nul.

La fonction	sa dérivée	Remarque
$x \mapsto ku(x)$	$ku'(x)$	
$x \mapsto (u+v)(x)$	$u'(x)+v'(x)$	
$x \mapsto (uv)(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	
$x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$	$-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$	là ou v ne s'annule pas
$x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$	là ou v ne s'annule pas
$x \mapsto (u(x))^n$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$	
$x \mapsto \sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u(x)>0$

Théorème 2.10. ***dérivée d'ordre** n **et formule de Leibniz***
Soit n un entier naturel non nul, soit f une fonction définie sur un intervalle I

. *si f est dérivable sur I, on note $f' = f^{(1)}$ sa dérivée, c'est la dérivée d'ordre 1 de f.*

. *si $f^{(1)}$ est dérivable sur I, on note $f" = f^{(2)}$ sa dérivée, c'est la dérivée d'ordre 2 de f.*

. *si $f^{(2)}$ est dérivable sur I, on note $f''' = f^{(3)}$ sa dérivée, c'est la dérivée d'ordre 3 de f.*

. *En général, si f est n fois dérivable sur I, la dérivée d'ordre $n+1$ est donnée par la relation*

$$(f^{(n)})' = f^{(n+1)}$$

Par convention on note $f^{(0)} = f$

Formule de Leibniz
Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. On a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Exemple

f et g sont les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ et $g(x) = \sin x$

1. Calculer $f^{(k)}(x)$, $g^{(k)}(x)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et en déduire l'expression de $f^{(n)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$
2. A l'aide de la formule de Leibniz, donner l'expression de $(fg)^{(3)}(x)$

Théorème 2.11. - *Une fonction définie sur un intervalle et dérivable, est constante si et seulement si sa dérivée est identiquement nulle dans cet intervalle.*
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . si f' garde un signe constant sur I alors f est monotone ; plus précisement

i) *si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.*

ii) *si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I*

iii) *si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.*

iv) *si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.*

Définition 2.8. **i)** *On dit que f admet un maximum (local ou relatif) en a si et seulement si, pour tout x appartenant à un voisinage de a $f(x) \leqslant f(a)$*

ii) *On dit que f admet un minimum (local ou relatif) en a si et seulement si, pour tout x appartenant à un voisinage de a $f(x) \geqslant f(a)$*

Théorème 2.12. **i)** *Si f est dérivable x_0 et admet un extréma en x_0 alors $f'(x_0) = 0$*

ii) *Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe alors x_0 est un point d'inflexion.*

Théorème 2.13. *Toute fonction f dérivable et strictement monotone sur un intervalle I est bijective. Si de plus $f' \neq 0$ sur I alors saréciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et de fonction dérivée $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$*

Théorème 2.14. ***dérivée de fonctions composées***
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle J et g une fonction dérivable sur un intervalle contenant $f(J)$. La fonction $g \circ f$ est dérivable sur J et on a : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$

Théorème 2.15. ***(Théorème de Rolle)***
Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose aussi que $f(a) = f(b)$. Alors , il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$

Théorème 2.16. ***(Théorème des accroissements finis)***
Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

2.4 Fonctions monotones sur un intervalle.

Théorème 2.17. *Soit I un intervalle non trivial et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors :*

— *$J = f(I)$ est un intervalle.*

— *f induit une bijection encore notée f de I sur J ;*

— *f^{-1} est continue et de même sens de variation que f.*

2.5 Les fonctions arccos, arcsin, arctan.

2.5.1 Arccos

La restriction du cosinus à $[0, \pi]$ est continue strictement décroissante , elle définie une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 2.9. *La fonction* arccos *est la fonction réciproque de la restrictionà* $[0, \pi]$ *de la fonction* cos.

Tableau de variations

On a les équivalences fondamentales suivantes :

— pour tout $x \in [-1,1]$, pour tout, $y \in [0,\pi]$, $y = \arccos(x) \iff x = \cos(y)$
— pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$
— pour tout $x \in [0,\pi]$ $\arccos(cos(x)) = x$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^>} \arccos x = \pi \text{ et } \lim_{x \longrightarrow +1^<} \arccos x = 0$$

Exercice Remplir le tableau de valeurs suivant :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\arccos(x)$								

2.5.2 Utilisisation dans la résolutionn des équations et inéquations

. $\arccos(u(x)) = a \iff \left(\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant \pi \\ u(x) = \cos a \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} a \notin [0,\pi] \\ S = \emptyset \end{cases} \right)$

. $\arccos(u(x)) < a \iff \left(\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant \pi \\ 1 \geqslant u(x) > \cos a \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} a > \pi \\ -1 \leqslant u(x) \leqslant 1 \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} a < 0 \\ S = \emptyset \end{cases} \right)$

. $\arccos(u(x)) = \arccos(v(x)) \iff \begin{cases} -1 \leqslant u(x) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant v(x) \leqslant 1 \\ u(x) = v(x) \end{cases}$

2.5.3 dérivée

Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arccos(x) \in]0,\pi[$ $cos' = -sin$ ne s'annule pas sur $]0,\pi[$ donc arccos est dérivable sur $]-1,1[$. On a :

Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.5.4 Etude da la fonction $f : x \mapsto \arccos(u(x))$

. **Ensemble de définition :** $D_f = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leqslant u(x) \leqslant 1\}$

. **dérivée :** D'une façon générale pour toute fonction $u(x)$, dérivable et à valeurs dans $]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = \arccos'(u(x)) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition puis calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

Exercice
On considère la fonction $g(x) = \arccos(2x^2 - 1)$

1. Démontrer que g est continue et paire sur $[-1, 1]$
2. Déterminer l'intervalle pour lequel g est dérivable
3. Montrer que $g'(x) = -\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}}$. Déterminer une expression simple de $g'(x)$
4. En déduire que $g(x) = 2\arccos(|x|)$
5. Tracer la courbe C_g de la fonction g

2.5.5 Arcsin

Définition 2.10. *La restriction de sinusà* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *est continue strictement croissante. Elle induit donc une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1, 1]$. *Sa bijection réciproque est une application de* $[-1, 1]$ *dans* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *qui est appelée* arcsin.

Tableaux de variations

On a les équivalences fondamentales suivantes :

- pour tout $x \in [-1, 1]$, pour tout $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y = \arcsin(x) \iff x = \sin(y)$
- pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$
- pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
  $\arcsin(sin(x)) = x$

Exercice Remplir le tableau de valeurs suivant :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\arcsin(x)$								

Propriété 2.3. *La fonction* arcsin *est impaire c'est-à-dire pour tout* $x \in [-1, 1]$, $-x \in [-1, 1]$ *; et* $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

Application à la résolution des équations et inéquations

. $\arcsin(u(x)) = b \iff \left(\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ u(x) = \sin b \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} b \notin [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}] \\ S = \emptyset \end{cases} \right)$

. $\arcsin(u(x)) < b \iff \left(\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ -1 \leqslant u(x) < \sin b \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} b > \dfrac{\pi}{2} \\ -1 \leqslant u(x) \leqslant 1 \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} b < -\dfrac{\pi}{2} \\ S = \emptyset \end{cases} \right)$

. $\arcsin(u(x)) = \arcsin(v(x)) \iff \begin{cases} -1 \leqslant u(x) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant v(x) \leqslant 1 \\ u(x) = v(x) \end{cases}$

2.5.6 dérivée

Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arcsin(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $sin' = cos$ ne s'annule pas sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. On a :

Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.5.7 Etude da la fonction $f \mapsto \arcsin(u(x))$

. Ensemble de définition

$D_f = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leqslant u(x) \leqslant 1\}$

. dérivée

D'une façon générale pour toute fonction $u(x)$, dérivable et à valeurs dans $]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = \arcsin'(u(x)) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

Il résulte de ce résultat et de la dérivée de arccos que la dérivée de $\arccos + \arcsin$ est nulle sur $]-1,1[$ donc $\arccos + \arcsin$ est constante sur $]-1,1[$ puis sur $[-1,1]$ par Continuité.

L'évaluation en $x = 0$, nous permet de conclure que pour tout $x \in [-1,1]$; on a :

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exemple

1) Déterminer l'ensemble de définition puis calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

2) Simplifier les expressions suivantes : $\cos(\arcsin(x))$; $\sin(\arccos x)$

2.5.8 Arctan

Définition 2.11. *La fonction tangente est continue et strictement croissante sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *. Elle induit donc une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $]-\infty, +\infty[$*. Sa réciproque par définition est la fonction* arctan *définie de* $]-\infty, +\infty[$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Tableau de variations

On a la propriété fondamentale :

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $y = \arctan(x) \iff x = \tan(y)$

— pour tout $x \in \mathbb{R}, tan(arctan(x)) = x$

— pour tout $x, \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\arctan(tan(x)) = x$.

arctan est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est définie de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Exercice Remplir le tableau de valeurs suivant :

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$							

Propriété 2.4. *Pour tout* $x > 0$ $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ *et*
Pour tout $x < 0$ $\arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - \arctan x$

Application dans la résolution des équations et inéquations

. $\arctan(u(x)) = c \quad \iff \left(\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2} \\ u(x) = \tan c \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} c \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ S = \emptyset \end{cases} \right)$

. $\arctan(u(x)) < c \iff \left(\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2} \\ u(x) < \tan c \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} c < -\frac{\pi}{2} \\ S = \emptyset \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} c > \frac{\pi}{2} \\ S = \mathcal{D}_u \end{cases} \right)$

. $\arctan(u(x)) = \arctan(v(x)) \iff u(x) = v(x)$

2.5.9 dérivée

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

2.5.10 Etude da la fonction : $x \mapsto \arctan(u(x))$

. Ensemble de définition

$D_f = \{x \in \mathbb{R}; u(x) \in \mathbb{R}\}$ ie l'ensemble de définition de f est celui de u

. dérivée

D'une façon générale pour toute fonction $u(x)$, dérivable et à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \arctan'(u(x)) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition puis calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \arctan \frac{x^2}{x^2-1}$$

2.6 Fonctions Hyperboliques

Définition 2.12. *On definit sur* $\mathbb{R}$ *,*

i) *la fonction cosinus hyperbolique et on note* cosh *ou ch par* $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

ii) *la fonction sinus hyperbolique et on note* sinh *ou sh par* $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

iii) *la fonction tangente hyperbolique et on note* tanh *ou th par* $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

Remarque 2.4. . *On utilise parfois* $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$

. *Le terme hyperbolique se justifie géométriquement. En effet, en posant :* $\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}$ *quant* t *décrit* $\mathbb{R}$ M *de coordonnées* (x, y) *décrit une branche d'hyperbole*

2.6.1 Trigonométrie hyperbolique

Dans la suite a et b désigneront les nombres réels .

1. $\cosh a + \sinh a = e^a$ et $\cosh a - \sinh a = e^a$
2. $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$ par suite, $\cosh a \geqslant 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

3. $1 - \tanh^2 a = \dfrac{1}{\cosh^2 a}$ et par suite, $-1 < \tanh a < 1$
4. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$
5. $\cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b$
6. $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$
7. $\sinh(a-b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$
8. $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$
9. $\tanh(a-b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 - \tanh a \tanh b}$

2.7 Etude des fonctions hyperboliques

2.7.1 Etude de la fonction $\cosh$ ou ch

$\cosh$ est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cosh(-x) = \cosh x$: la fonction cosh est paire ; on va donc l'étudier sur $I = [0, +\infty[$.

$$\text{Pour tout } x \in I, \cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

De plus, comme pour tout $x \in I$, $e^x \geqslant e^{-x}$ (la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$), la fonction sinh est positive sur I et par suite cosh est croissante sur I. Cela permet en particulier d'affirmer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh x \geqslant \cosh 0 = 1$.
Il est d'autre part clair que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$. On observe alors que $\dfrac{\cosh x}{x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de la fonction cosh admet donc une branche parabolique de direction asymptotique (Oy).

Tableau de variations

Remarque 2.5. *Cette courbe est appelée chaînette. Elle correspond en effet à la position d'équilibre d'un fil inextensible suspendu par deux de ses points.*

2.7.2 Etude de la fonction sinh ou sh

sinh est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sinh(-x) = -\sinh(x)$: la fonction sinh est impaire ; on va donc l'étudier sur $I = [0, +\infty[$.

$$\text{Pour tout } x \in I, \sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

De plus, comme la fonction cosh est positive sur I, sinh est croissante sur I. D'autre part , $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$. On observe que $\dfrac{\sinh x}{x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$
La courbe représentative de la fonction sinh admet donc une branche parabolique de direction asymptotique $(y'y)$.

Tableau de variations

On peut de plus remarquer que puisque $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$, les deux courbes ci-dessus sont asymptotes en $+\infty$, la courbe représentative de cosh étant constamment au dessus de celle de sinh car $e^{-x} > 0$.

2.7.3 Etude de la fonction tanh ou th

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh x \geqslant 1$, tanh est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\tanh(-x) = -\tanh(x)$: la fonction tanh est impaire ; on va donc l'étudier sur $I = [0, +\infty[$

Pour tout $x \in I, \tanh'(x) = \dfrac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

La fonction tanh est croissante sur I

D'autre part $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \tanh(x) = 1$, La courbe représentative de la fonction tanh admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Tableau de variations

2.7.4 Limites classiques

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sinh x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\tanh x}{x} = 1$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\cosh x}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

2.8 Fonctions hyperboliques réciproques

2.8.1 Argument cosinus hyperbolique

La fonction coshdéfinie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ est continue et strictement croissante ; elle admet donc une fonction réciproque, appelée Argument cosinus hyperbolique et notée $Argch$.

— $x = Argch(y) \iff (y = \cosh(x) \ \ et \ x \in [0, +\infty[)$

— $\forall x \in [0, +\infty[\, , \ Argch(ch(x)) = x$

— $\forall x \in [1, +\infty[\ \ ch(Argch(x)) = x$

$e^x = \cosh x + \sinh x = \cosh x + \sqrt{\cosh^2 x - 1}$ car $sh(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$, en déduit que :

$$x = Argchy = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

D'après le Théorème sur la dérivée des fonctions réciproques, on a :

$$\text{pour tout } x \in [1, +\infty[\, , \ (Argch)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Tableau de variations

2.8.2 Etude da la fonction $f : x \mapsto \quad Argch(u(x))$

. Ensemble de définition

$D_f = \{x \in \mathbb{R}; u(x) \geqslant 1\}$

. dérivée

Si u est dérivable et à valeurs dans $]1, +\infty[$ alors la fonction f est dérivable et de fonction dérivée

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - 1}}$$

. **Applications dans la résolution des équations et inéquations**

i) $Argch\ (u(x)) = a \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0 \\ u(x) = cha \end{cases}$

ii) $Argch\ (u(x)) > a \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0 \\ 1 > u(x) > cha \end{cases}$

Exercice

Etudier et tracer la courbe représentative de la fonction$f(x) = Argch(x^2 - 1)$

2.8.3 Argument sinus hyperbolique

La fonction sinh définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue et strictement croissante ; elle admet donc une fonction réciproque, appelée Argument sinus hyperbolique et notée $Argsh$. On a donc :

— $x = Argsh(y) \iff (y = \sinh(x)\ \ et\ x \in \mathbb{R})$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}; Argsh(sh(x)) = x$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}; sh(Arsh(x)) = x$

$e^x = \cosh x + \sinh x = \sinh x + \sqrt{\sinh^2 x + 1}$, on obtient

$$x = Argshy = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

D'après le Théorème sur la dérivée des fonctions réciproques, on a donc :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ (Argsh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Tableau de variations

2.8.4 Etude da la fonction $f : x \mapsto \quad Argsh(u(x))$

. **Ensemble de définition**

$D_f = \{x \in \mathbb{R}; u(x) \in \mathbb{R}\}$. En effet l'ensemble de définition de f est égale à l'ensemble de définition de u

. **dérivée**

La fonction f est dérivable sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition de fonction dérivée

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u(x))^2}}$$

. **Applications dans la résolution des équations et inéquations**

i) $Argsh\ (u(x)) = b \quad \Longleftrightarrow u(x) = sh(b)$

ii) $Argsh\ (u(x)) > b \quad \Longleftrightarrow u(x) > sh(b)$

Exercice

Etudier et tracer la courbe représentative de la fonction $g(x) = Argsh\left(\frac{1}{x}\right)$

2.8.5 Argument tangente hyperbolique

La fonction tanh définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$ est continue et strictement croissante ; elle admet donc une fonction réciproque, appelée Argument tangente hyperbolique et notée $Argth$. On a :

— $x = Argth(y) \iff (y = \tanh(x)\ \ et\ x \in \mathbb{R})$

— Pour tout $x \in]-1,1[;\ th(Argth(x)) = x$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}, Argth(thx)) = x$

$y = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ on $e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$et on obtient :

$$x = Argthy = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

. D'après le Théorème sur la dérivée des fonctions réciproques, on a :

$$\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ (Argth)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Tableau de variations

2.8.6 Etude da la fonction $h : x \mapsto \quad Argth(u(x))$

. Ensemble de définition

$D_h = \{x \in \mathbb{R}; -1 < u(x) < 1\}$.

. dérivée

Si u est dérivable alors la fonction h est dérivable et de fonction dérivée

$$h'(x) = \frac{u'(x)}{1 - (u(x))^2}$$

. Application dans la résolution des équations et inéquations

i) $Argth\ (u(x)) = c \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 < u(x) < 1 \\ u(x) = th(c) \end{cases}$

ii) $Argth\ (u(x)) \leqslant c \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} c \in \mathbb{R} \\ -1 < u(x) < 1 \\ u(x) \leqslant th(c) \end{cases}$

Exercice

Etudier et tracer la courbe représentative de la fonction $g(x) = Argth\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

2.9 Travaux dirigés dur les fonctions

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis calculer les limites aux bornes de cet ensemble de définition

1. a) $x \mapsto cos(arccos(x))$, b) $x \mapsto arccos(cos(x))$ c) $x \mapsto sin(arcsin(x))$,

   d) $x \mapsto arcsin(sin(x))$, e) $x \mapsto arctan(tan(x))$ f) $x \mapsto tan(arctan(x))$

2. a) $x \mapsto arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ b) $x \mapsto arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ c) $x \mapsto arcsin(e^{-x^2})$

   d) $x \mapsto \arccos x + Argch(x)$

Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes :

$$a)\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\arcsin(1-x)}{x^3-x},\ \ b)\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\arctan(x)}{Argsh(x)},\ \ c)\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{Argth(4-x^2)}{\arcsin(x+2)},\ \ d)\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{Argth(x^2)}{\sin(x)}$$

2. Etablir les identités suivantes :

a) $Argsh(x)=ln(x+\sqrt{x^2+1}),\forall x\in\mathbb{R}$

b) $Argch(x)=ln(x+\sqrt{x^2-1}),x\geqslant 1$

c) $Argth(x)=\dfrac{1}{2}ln(\dfrac{1+x}{1-x}),|x|<1$

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{x}}$ puis $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

4. En utilisant la règle d'Hospital calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{cos(x)+ch(x)-2}{x^4}$ b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(sinx)}{(\pi-2x)^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a^x-b^x}{sinx}$, d) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-cos(x)}{sinx}$

e) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{4}}\frac{1-tanx}{cos(2x)}$

5. Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

Exercice 3

On considère la fonction f de la variable réel x définie par :

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}\ si\ x\neq 0\\ e\ si\ x=0\end{cases}$$

1. Etudier la Continuité de f sur son ensemble de définition.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

Montrer que g se prolonge par Continuité en 0 et calculer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}g$

Exercice 4

Calculer la dérivée n-ième de

1 a) $x\mapsto sinxe^x$, b) $x\mapsto x^2(1+x)^n$, c) $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ d) $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ e) $x\mapsto\dfrac{1}{1-x^2}$

2. Calculer de deux façon la dérivée n-ième de $x\mapsto x^{2n}$ En déduire une expression de

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} sinx$. Montrer que $f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$

Exercice 5

1. Déterminer l'ensemble de définition et calculer les dérivées des fonctions f_i (on précisera l'ensemble de dérivabilité) définies par :
   a) $f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$ b) $f_2(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
   c) $f_3 \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ d) $f_4(x) = arccotan(x^2 - 1)$
2. Déterminer l'ensemble de définition et calculer les dérivées des fonctions g_i (on précisera l'ensemble de dérivabilité) définies par :
   a) $g_1(x) = Argsh(2x+3)$ b) $b)g_2(x) = Argch(1-x^2)$
   c) $g_3(x) = Argth\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ d) $g_4(x) = Argcoth(x^2)$
3. Pour chaque fonction ci-dessus, donner la représentation graphique

Exercice 6

1. Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes dans $\mathbb{R}$:
   a) $\arcsin(x) - x + 1 = 0,$, $2\arccos(x) - x^2 = \frac{\pi}{2}$, $\arctan(x) - \frac{1}{2}x^2 + 1 = 0$
   b) $3Argth(x) + x - 2 = 0$, $-Argsh(x) - x^3 + 2 = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   a) $3\arcsin(x) + \pi \leqslant 0$
   b) $4\arctan(x) - \pi > 0$
   c) $Argsh(x^2 - x - 2) \leqslant 0$
   d) $Argcoth(x^2 - 2) \geqslant 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante (après avoir déterminé domaine de définition) :
$$\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$$
4. $\arccos(x) = \arcsin(2x)$
5. $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} = \arcsin x$

Exercice 7

Etudier et donner une représentation graphique des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

b) $g(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

c) $h(x) = \arccos\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

<u>Exercice 8</u>

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $chx + 2shx = 3$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Argth(x) + Argth(2x) = Argth\dfrac{2}{3}$
3. Simplifier les expressions :

   a) $cos(arctan(x))$, b) $sin(arctan(x))$, c)$cos(arcsin(x))$ d) $sin(arccos(x))$ e) $cos(3arctan(x))$, f) $cos^2(\dfrac{1}{2}arctan(x))$ g) $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
4. Simplifier les expressions suivantes

   a) $ch(ln(x+\sqrt{x^2-1}))$, b)$sh(ln(x+\sqrt{x^2+1}))$, c) $Argsh\dfrac{x^2-1}{2x}$

Chapitre 3

TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$

3.1 La notion d'Ouverts, Fermés, Voisinage

Rappel : Une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si :

$$\forall x, y \in I,\ [x, y] \subset I$$

$[a, b]$: intervalle fermé d'extrémité $a$bet b
$]a, b[$: intervalle ouvert d'extrémité $a$bet b
$[a, b[$: intervalle ouvert en b et fermé en a
$]-\infty, a[,]-\infty, a], [a, +\infty[,]a, +\infty[$
On note $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0$, $I(x; \epsilon)$ = intervalle centré en x et de rayon ϵ $I(x; \epsilon) =]x - \epsilon, x + \epsilon[$

3.1.1 Ouvert

Soit $O \subset \mathbb{R}$. On dit que O est un ouvert si $O = \emptyset$ ou si $\forall x \in O$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $I(x; \epsilon) \subset O$.

Remarque 3.1. *O est un ouvert si $O = \emptyset$ ou si $\forall x \in O$, il existe un intervalle ouvert I tel que $x \in I \subset O$*

Exemple ; $]1, 2[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

Démonstration. Soit $x \in]1, 2[$; cherchons $\epsilon > 0$ tel que $I(x; \epsilon) \subset]1, 2[$.
Pour $\epsilon = \min(x - 1, 2 - x)$, montrons que $I(x; \epsilon) \subset]1, 2[$.
Soit $y \in I(x; \epsilon)$; on a $x - \epsilon < y < x + \epsilon$ comme $\epsilon \leqslant 2 - x$ on a $y < x + \epsilon \leqslant 2$. Par ailleurs comme $\epsilon \leqslant x - 1$, on a $x - \epsilon \geqslant x - x + 1 = 1$
On a $1 \leqslant x - \epsilon < y$ on conclut que $1 < y < 2$ c'est-à-dire $y \in]1, 2[$ □

Tout intervalle ouvert $]a, b[$ est un ouvert
$O =]1, 2]$ **n'est pas ouvert.** En effet pour $x = 2 \in]1, 2]$. Pour $\epsilon > 0$, $2 + \epsilon \notin]1, 2]$

Théorème 3.1. *1. Toute réunion (finie ou non) d'ouverts de $\mathbb{R}$ est ouvert.*

2. Toute intersection finie d'ouverts est ouvert

3. $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sont ouverts

Démonstration. 1. Soit $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille d'ouverts. Montrons que $O = \cup_{\alpha\in I} O_\alpha$ est ouvert. Si $O = \emptyset$, c'est terminé.
Si $O \neq$, soit $x \in O$, alors il existe $\alpha_0 \in I$ tel que $x \in O_{\alpha_0}$. Comme O_{α_0} est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $I(x,\epsilon) \subset O_{\alpha_0}$, or $O_{\alpha_0} \subset \cup_{\alpha\in I} O_\alpha = O$. Donc $I(x,\epsilon) \subset O$

2. Soit $O_1, \cdots O_N$ une famille finie d'ouverts.
Montrons que $O = \cap_{k=1}^{N} O_k$ est ouvert
Si $O = \emptyset$, c'est etrminé.
Supposons que $O \neq \emptyset$
Soit $x \in O$, $x \in O_k, \forall k = 1, \cdots N$. O_k ouvert alors il existe $I(x;\epsilon_k)$ tel que $I(x;\epsilon_k) \subset O_k$.
Posons $\epsilon = \min \epsilon_k$ $k = 1, \cdots N$ (ϵ existe , car les ϵ_k sont finis)
Montrons que $I(x,\epsilon) \subset O$
En effet $I(x,\epsilon) \subset I(x;\epsilon_k)$ car $\epsilon \leqslant \epsilon_k$. Ainsi $\forall k, I(x,\epsilon) \subset O_k$ c'est-à-dire $I(x,\epsilon) \subset \cap_{k=1}^{N} O_k = O$. D'où le résultat.

3. $\emptyset$ est ouvert. $\forall x \in \mathbb{R}$, $]x-1, x+1[\subset \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ est ouvert.

□

Corollaire 3.1. *Un ensemble O non vide est un ouvert si et seulement si O est une réunion d'intervalles ouverts*

Démonstration.
— Si O est la réunion d'intervalles ouverts, alors O est la réunion d'ouverts car un intervalle ouvert est un ouvert. D' àprès la propriété 1, O est ouvert.
— Soit $O \neq \emptyset$ un ouvert. Par définition , $\forall x \in O, \exists \epsilon_x > 0, / I(x,\epsilon_x) \subset O$, donc $O = \cup_{x\in O} I(x,\epsilon_x)$

□

Voisinage d'un point

Définition 3.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de x, si il existe $\epsilon > 0$ tel que $I(x,\epsilon) \subset V$*

Exemple : $V_1 =]1,3] \cup]4,6[$
V_1 n'est pas un voisinage de 1 ; V_1 est voisinage de 2 ; V_1 n'est pas voisinage de 3.

$V_2 =]1,2[$ 4 n'est pas voisinage 2
On note par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Corollaire 3.2. *$O \neq \emptyset$ est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points*

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que O est un ouvert, donc $\forall x \in O, \exists \epsilon > 0 / I(x,\epsilon) \subset O$. Donc O est voisinage en x. D'où $\forall x \in O$, O est voisinage de x
($\Longleftarrow$ Supposons que O est voisinage en chacun de ses points.
Ainsi $\forall x \in O, \exists \epsilon_x > 0 / I(x,\epsilon_x) \subset O$ on a $\cup_{x\in O} I(x,\epsilon_x) = O$. Donc O est un ouvert, car il est une réunion d'intervalle ouvert. $\square$

Théorème 3.2. ***($\mathbb{R}$ est séparé)***
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, tel que $x \neq y$ il existe $V(x)$ un voisinage de x et $V(y)$ un voisinage de y tel que $V(x) \cap V(y) = \emptyset$

3.2 Fermés

Définition 3.2. *$F \subset \mathbb{R}$ est une partie fermée si $C_{\mathbb{R}}^{F}$ est ouvert.*

Exemple : $[1,2]$ **est fermé**
En effet $C_{\mathbb{R}}^{[1,2]} =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$; $]-\infty,1[$ et $]2,+\infty[$ sont des ouverts. Donc
$C_{\mathbb{R}}^{[1,2]}$ est une réunion d'ouverts et donc un ouvert.
$[1,3[$ **n'est pas fermé**

Théorème 3.3.
1. *Toute intersection (finie ou non) de fermés est fermé.*
2. *Toute réunion finie de fermés est fermé.*
3. *$\emptyset$, $\mathbb{R}$ sont fermés*

3.3 Points d'accumulation

Définition 3.3. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un point d'accumulation de A si $\forall \epsilon > 0, I(x,\epsilon)$ rencontre un point de A différent de x. C'est-à-dire $I(x,\epsilon) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$.*

Exemple : $A = [1,2[\cup\{3\}$
— 1 est un point d'accumulation de A
— 2 est un point d'accumulation de A
— 3 n'est pas un point d'accumulation de A

Théorème 3.4. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. x est un point d'accumulation si et seulement si $\exists (x_n) \in A - \{x\}$ avec $x_n \neq x_m, \forall n \neq m$ telle que $x_n \longrightarrow x$*

Théorème 3.5. *Soit $F \subset \mathbb{R}$*

1. *F est fermé si et seulement si toute suite $(x_n) \in F$ convergente à sa limite dans F*
2. *F fermé si et seulement si F contient ses points d'accumulation.*

Démonstration. 1. $\Longrightarrow$) Supposons F fermé> Soit (x_n) une suite d'élément de F tel que $x_n \longrightarrow x$
Montrons que $x \in F$
Par l'absurde supposons que $x \neq F$, donc $x \in C_{\mathbb{R}}^{F}$. Comme F est fermé, $C_{\mathbb{R}}^{F}$ est ouvert. Donc $\exists \epsilon > 0 / I(x, \epsilon) \subset C_{\mathbb{R}}^{F}$. Puisque $x_n \longrightarrow x$, pour ϵ poser précédemment , $\exists N / n > N \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon$ c'est-à-dire $x_n \in I(x, \epsilon)$. Ainsi $x_{N+1} \in F \cap C_{\mathbb{R}}^{F}$. Ce qui est absurde.
$\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que toute suite (x_n) de F converge vers $x \in F$; et montrons que F est un fermé, c'est-à-dire $C_{\mathbb{R}}^{F}$ est ouvert.
Soit $x \in C_{\mathbb{R}}^{F}$ / $\forall \epsilon > 0, I(x, \epsilon) \nsubseteq C_{\mathbb{R}}^{F}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}*, \exists x_n \in F$ et $x_n \in I(x, \frac{1}{n})$ (avec $\epsilon = \frac{1}{n}$). On construit ainsi une suite $(x_n) \in F$, $|x_n - x| < \frac{1}{n}$. Ainsi $(x_n) \subset F$ et $x_n \longrightarrow x$. De l'hypothèse $x \in F$ d'où $x \in F \cap C_{\mathbb{R}}^{F}$. Ce qui est absurde.

□

On note par A' l'ensemble dérivé. C'est l'ensemble des points d'accumulation de A
Exemple : $[0, 3] \cup \mathbb{N}$ **;** $A' = [0, 3]$

3.3.1 Point isolé

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in A$.
On ditv que x est un **un point isolé** , si x n'est pas un point d'accumulation de A. C'est-à- dire

$$\exists \epsilon > 0, \text{ tel que } I(x, \epsilon) \cap A = \{x\}$$

Théorème 3.6. *Tout sous-ensemble borné X de $\mathbb{R}$ admet un point d'accumulation*

Démonstration. Comme X a une infinité d'élément, il existe une suite (x_n) contenu dans X formée des points deux à deux distincts. Puisque X est borné, la suite (x_n) est aussi bornée. Donc d'après le Théorème de Bolzano- Weierstrass, il existe (x_m) sous-suite de (x_n) qui converge vers x. Ainsi x est un point d'accumulation de X. $\mathbb{N}$ est une partie non bornée de $\mathbb{R}$ et ayant un nombre infini d'élément. $\mathbb{N}$ n'admet pas de point d'accumulation. □

3.4 Adhérance et intérieur d'un Ensemble

3.4.1 Notion d'adhérance

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que **x est adhérant à** A si pour tout $\epsilon > 0$, $I(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.
On note par $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérants.
Exemple : $A =]0, 1]$ **;** $\overline{A} = [0, 1]$

Proposition 3.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}$; $\overline{A} = A \cup A'$*

Démonstration. $A \subset \overline{A}$ et $A' \subset A$,ainsi $A \cup A' \subset A$
Montrons que $\overline{A} \subset A \cup A'$
En effet, soit $x \in \overline{A}$ tel que $x \neq A$. Soit $\epsilon > 0$, $x \in \overline{A} \Longrightarrow I(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Or $x \neq A \Longrightarrow A = A - \{x\}$ et donc $I(x, \epsilon) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ c'est-à-dire $x \in A'$. Ainsi $\overline{A} \subset A \cup A'$ □

Définition 3.4. *On appelle* ***fermeture de*** *A le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ (sens de l'inclusion) de $\mathbb{R}$ qui contient A. Il est noté $\overline{A}$*

Remarque 3.2. *$\forall F$ fermé, tel que $A \subset F$, on a $\overline{A} \subset F$. $\overline{A} = \cap F$, F fermé et $A \subset F$*

Corollaire 3.3. *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$*

3.4.2 Intérieur d'un ensemble

Définition 3.5. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que x est un point intérieur à A si il existe $\epsilon > 0$ tel que $I(x, \epsilon) \subset A$.*
L'ensemble des points intérieurs de A est appelé ***l'intérieur de*** *A et est noté A°*

Exercice Montrer que pour $A = [0, 1[$, $A^\circ =]0, 1[$

Théorème 3.7. *Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, A° est le grand ouvert (au sens de l'inclusion) contenu dans A*

Démonstration. 1. A° **est ouvert**
Si $A^\circ = \emptyset$ c'est terminé
Si $A^\circ \neq \emptyset$ soit $x \in A^\circ$, $\exists \epsilon > 0 / I(x, \epsilon) \subset A$
montrons que $I(x, \epsilon) \subset A^\circ$
Soit $y \in I(x, \epsilon)$ Comme $I(x, \epsilon)$ est ouvert, il existe donc $\beta > 0 / I9y, \beta) \subset I(x, \epsilon) \subset A$
donc $I(y, \beta) \subset A$, d'où $y \in A^\circ$

2. Soit Ω un ouvert telle que $\Omega \subset A$. Montrons que $\Omega \subset A^\circ$
   En effet pour $x \in \Omega$, il existe $\epsilon > 0$ / $I(x,\epsilon) \subset \Omega$ or $\Omega \subset A$ donc $I(x,\epsilon) \subset A$ d'où $x \in A^\circ$. Ainsi $\forall x \in \Omega,\ x \in A^\circ$.

$\square$

Propriété 3.1. *1.* $A^{\circ\circ} = A^\circ$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

2. *Si* $A \subset B \Longrightarrow A^\circ \subset B^\circ$ *;* $\overline{A} \subset \overline{B}$

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

4. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = A^\circ \cap B^\circ$

5. $\overset{\circ}{\overbrace{B \cup A}} \supset B^\circ \cup A^\circ$

6. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ *;* $\overline{\emptyset} = \emptyset$

7. $C_{\mathbb{R}}^{A^\circ} = C_{\mathbb{R}}^{\overline{A}}$, $C_{\mathbb{R}}^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\overbrace{C_{\mathbb{R}}^{A}}}$

3.5 Frontière et Extérieure d'un ensemble

Soit $A \subset \mathbb{R}$;
On appelle **Extérieure de** A **et on note** $Ext(A)$, l'intérieur du complémentaire de A dans $\mathbb{R}$
La frontière de A **noté** $Fr(A)$ est l'intersection de l'extérieur et de ládhérence de A. C'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}/\forall\epsilon > 0, I(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $I(x,\epsilon) \cap C_{\mathbb{R}}^{A} \neq \emptyset$

Proposition 3.2. $\forall A \subset \mathbb{R}$, $Fr(A) = \overline{A} \cap C_{\mathbb{R}}^{\overline{A}}$ *;* $Fr(A) = Fr(C_{\mathbb{R}}^{A})$

Exemple : $A =]0,1] \cup \{5\}$; $\overline{A} = [0,1] \cap \{5\}$; $A^\circ =]0,1[$; $Fr(A) = \{0,1,5\}$; $Ext(A) =]-\infty, 0[\cup]1, 5[\cup]5, +\infty[$

3.6 La notion de compact

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ On appelle **recouvrement de** A toute famille $(\Omega_j)_{j\in I}$ telle que $A \subset \cup_{j\in I}\Omega_j$.
Si $\forall j \in I, \Omega_j$ est un ouvert, on dit qu'on a un recouvrement ouvert de A
Soit $\Omega_i)_{i\in I}$ Un recouvrement de A. On appelle **Sous recouvrement** $\Omega_i)_{i\in I}$, tout recouvrement (Ω_{j_k}) et $J \subset I$.

Définition 3.6. *Soit* $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ *On dit que A est* ***Compact*** *si de tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous recouvrement fini. Cest-à-dire* $\forall(\Omega)_{i\in I}$ *avec* Ω_i *ouvert tel que* $A \subset \cup(\Omega_i)_{i\in I}$ *il existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \subset \cup(\Omega_{i_k})_{1\leqslant k\leqslant N}$

Exercice

1. Montrer que $]0,1[$ n'est pas compact
2. Montrer que l'ensemble $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ est compact

Solution

1. Montrons que $]0,1[$ n'est pas compact $\forall x \in]0,1[$, posons $\Omega_x = \left]\frac{x}{2},1\right[$.
   On a, $]0,1[\subset \cup_{x\in]0,1[}(\Omega_x)$. Montrons qu'on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini de ce recouvrement.
   Supposons par l'absurde qu'il existe un sous recouvrement fini. C'est-à-dire $\exists N\in\mathbb{N}^*$ tel que $]0,1[\subset \cup_{1\leqslant k\leqslant N}(\Omega_{x_k})$ pour $x=\min\left(\frac{x_k}{2}\right)$, on a $\forall y \in]0,x[,\ y\in]0,1[$ mais $y\notin \cup_{1\leqslant k\leqslant N}(\Omega_{x_k})$ ce qui est absurde.
2. Montrons que $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ est compact.
   Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. C'est-à-dire $A\subset\cup(\Omega_i)_{i\in I}$ et Ω_i ouvert. Pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, comme $x_k\in A\subset\Omega_i$, donc il existe $i_k\in I$ tel que $x_k\in\Omega_{i_k}$. D' où $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ est contenu dans $\bigcup\Omega_{i_k}$, $k\in\{1,2,\cdots,n\}$. Donc A est compact.

Théorème 3.8. ***(Théorème de Heine-Borel-Lebergue)***
$\forall a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$ l'intervalle $[a,b]$ est compact.

Théorème 3.9. *Un ensemble $A\subset\mathbb{R}$ est compact $\Longleftrightarrow$ A est fermé et borné.*

Démonstration. Soit A un compact. Soit $x\in A$. Posons $I_x=I(x,1)$ on a $A\subset\bigcup_{x\in A} I_x$.

Puisque A est compact, $\exists x_1,x_2,\cdots,x_N\in A$ tel que $A\subset\bigcup_{k=1}^{N} I_{x_k}$

Comme I_{x_k} est borné, prendre $|x_k|+1$ comme borne. On a $\bigcup_{k=1}^{N} I_{x_k}$ est bornée. Prendre $\max_{\{k=1,\cdots,N\}}|x_k|+1$. Ainsi A est borné.

Montrons que A est fermé

Il suffit de prouver que $C_{\mathbb{R}}^{A}$ est ouvert.

Soit $x\in C_{\mathbb{R}}^{A}$. Cherchons $\epsilon>0$ tel que $I(x,\epsilon)\subset C_{\mathbb{R}}^{A}$

$\forall y\in A$, comme $\mathbb{R}$ est séparé et $x\neq y$ alors $\exists I(y,\eta_y)$ et $I(x,\epsilon_y)$

tel que $I(y,\eta_y)\cap I(x,\epsilon_y)=\emptyset$. Ainsi $A\subset\cup I(y,\eta_y)$. De compacité de A. $\exists y_1,y_2,\cdots,y_N\in A$ tel que $A\subset\bigcup_{k=1}^{N} I(y_k,\eta_{y_k})$ et $\forall k=1,\cdots,N$, $I(y,\eta_y)\cap I(x,\epsilon_y)=\emptyset$.

Posons $\epsilon \min \epsilon_{y_\epsilon}$. Montrons que $I(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Comme $k = 1, \cdots, N$ $I(x,\epsilon) \subset I(x, \epsilon_{y_k}$ et $I(x,\epsilon) \cap I(x, \epsilon_{y_k}) = \emptyset$. D'où $I(x,\epsilon) \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{N} I\left(y_k, \eta_{y_k}\right) \right) = \emptyset$. C'est-à-dire $I(x,\epsilon) \cap A = \emptyset$. Ce qui montre que $I(x,\epsilon) \subset C_{\mathbb{R}}^{A}$, d'où A est fermé.

$\Longleftarrow$)Supposons que A est borné. Montrons que A est compact.

Supposons A n'est compact, soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A tel qu'on peut obtenir un sous-recouvrement fini de A. Comme A est borné, alors $A \subset [a,b] = I_0$. Divisons en deux intervalles fermés de même longueur $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. Alors un de ces intervalle est tel que l'intersection avec A n'admet pas de recouvrement fini de (O_i).

$A = A \bigcap \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \bigcup A \bigcap \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$

Notons par I_1 cet intervalle. On réitère le processus en divisant en deux intervalles fermés de même longueur. on obtient un intervalle fermé I_2 tel que $I_2 \cap A$ n'admet pas de recouvrement fini. On a $I_2 \subset I_1$ et $|I_2| = \dfrac{|I_1|}{2}$. On continue et on obtient une suite d'intervalles fermés I_n tel aue $I_n \cap A$ n'admet pas sous-recouvrement fini et $|I_n| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$. Du théorème des intervalles enboîtés $\bigcap_{n \geqslant 1} I_n = \{x\}$. Prenons $(x_n) \in I_n \cap A, \forall n$ Alors $x_n \longrightarrow x$ et $(x_n) \in A$. Puisque $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, $\exists i_0 \in I / x \in O_{i_0}$, or O_{i_0} est ouvert , il existe $\epsilon > 0, / I(x,\epsilon) \subset O_{i_0}$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, I_{n_0} \subset I(x,\epsilon)$, $I_{n_0} \subset O_{i_0}$ par suite $I_{i_0} \cap A \subset O_{i_0}$. Ce qui contredit le fait que $\forall n, I_n \cap A$ n'admet pas de sous-recouvrement fini de $(O_i)_{i \in I}$. Ainsi A est compact $\square$

Théorème 3.10. *A est compact si et seulement si de toute suite $(x_n) \subset A$ on peut extraire une sous-suite convergente et sa limite dans A*

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que A est compact c'est-à-dire A est fermé et born'e. Soit $(x_n) \in A$ Comme A est borné, (x_n) est bornée. Du théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe (x_{n_k}) une sou-suite de (x_n) qui converge vers x. Puisque A est fermé, on a $x \in A$

$\Longleftarrow$) Montrons que A est borné. Supposons que A n'est pas borné. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, |x_n| \leqslant n$. Comme $(x_n) \subset A$ de l'hypothès, $\exists (x_{n_k}) \subset (x_n)$ tel que $x_{n_k} \longrightarrow x \in A$ quand $n \longrightarrow +\infty$, or $\forall k$, $|x_{n_k}| \geqslant n_k$. D'où (x_{n_k}) est bornée, et (x_{n_k}) est convergente. Ce qui est absurde. Ainsi A est borné.

Montrons que A est fermée

Soit $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \longrightarrow x$. De l'hypothèse $\exists (x_{n_k})$ telle que $x_{n_k} \longrightarrow a \in A$. Unicité de la limite $a = x$ et par suite $x \in A$ $\square$

3.7 Limite Supérieure et Limite Inférieure d'une suite

3.7.1 Valeur d'adhérence d'une suite

Soit (u_n) une suite. Posons $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des valeurs de la suite.

Définition 3.7. *On dit que $a \in \mathbb{R}$ est* ***valeur d'adhérence*** *de la suite (u_n) si*

— *a est un* ***point d'accumulation*** *de E*

— *a est la valeur prise par une infinité de terme de la suite.*

Exemple : $(-1)^n = u_n$. 1 et -1 sont les valeurs d'adhérences de (u_n). En effet $u_{2n+1} = -1$ et $u_{2n} = 1$.

Remarque 3.3. *a est la valeur d'adhérence si $\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists k > N, |u_k - a| < \epsilon$*

Théorème 3.11. *Soit (u_n) une suite.* ***a est valeur d'adhérence*** *de $(u_n) \Longleftrightarrow$ il existe une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) qui converge vers a*

Remarque 3.4. *Si (u_n) converge, alors (u_n) admet une seule valeur d'adhérence qui est sa limite.*

Exemple : $v_n = \sin \dfrac{2\pi n}{5}$.
Si n est un multiple de 5 c'est-à-dire $n = 5k$ on $v_{5k} = \sin 2\pi k \longleftarrow 0$.
$v_{5k+1} = \sin \dfrac{2\pi}{5}$, $v_{5k+2} = \sin \dfrac{4\pi}{5}$, $v_{5k+3} = \sin \dfrac{6\pi}{5}$. D'où $A = \left\{0, \sin \dfrac{2\pi}{5}, \sin \dfrac{4\pi}{5}, \sin \dfrac{6\pi}{5}\right\}$

Définition 3.8. *Soit (u_n) une suite. On pose par A l'ensemble de ses valeurs d'adhérences. Si (u_n) est majorée, (resp. minorée). On appelle* ***limite supérieure****(resp* ***limite inférieure****) de (u_n) la* ***borne supérieure*** *de A (resp la* ***borne inférieure de*** *A)*

Notation $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$

Théorème 3.12. *Soit (u_n) une suite bornée,*

1. $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = a$
   Pour tout $\epsilon > 0$, il y a une infinité de terme de la suite tel que $u_n \geqslant a - \epsilon$ et il n' y a qu'un nombre fini de termes de la suite tel que $u_n \geqslant a + \epsilon$
2. $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = a$
   Pour tout $\epsilon > 0$, il y a une infinité de termes de la suite tel que $u_n \geqslant a + \epsilon$ et il n' y a qu'un nombre fini de termes de (u_n) tel que $u_n \leqslant a - \epsilon$.

Théorème 3.13. *Soit (u_n) une suite bornée on a :*

1. $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$
2. $(u_n))$ *converge* $\Longleftrightarrow \liminf u_n = \limsup u_n$
3. $\limsup u_n = \inf\limits_{k\geqslant 1} \left(\sup\limits_{n\geqslant k} u_n\right)$ *et $k \geqslant 1$, $n \geqslant k$* $\liminf u_n = \sup\limits_{k\geqslant 1} \left(\inf\limits_{n\geqslant k} u_n\right)$

3.8 Travaux Dirigés

Exercice 1

1. Soit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une injection croissante. Montrer que $\phi(n) \geqslant n$
2. Montrer qu'il n'existe pas de rationnel de carré 2
3. Montrer $\mathbb{N}$ n,est pas majoré dans $\mathbb{R}$ et en déduire que $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré dans $\mathbb{R}$

Exercice 2

Soit $A = \Big\{x \in \mathbb{Q}, x \geqslant 0, x^2 < 2\Big\}$; $B = \Big\{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0, x^2 \leqslant 2\Big\}$. On rappelle que $\sup B = \sqrt{2}$. Soit $\alpha = \sup A$.

1. Montrer en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dqns $\mathbb{R}$ que l'on ne peut pas avoir l'inégalité stricte $\alpha < \sqrt{2}$
2. En déduire que $\sup A = \sqrt{2}$. Conclure.

Exercice 3

Donner des exemples de sous-ensembles de A de $\mathbb{R}$ tels que :

1. $\max A$ et $\sup A$ existe ;
2. $\max A$ n'existe pas et $\sup A$ existe ;
3. $\min A$ et $\inf A$ existent ;
4. $\min A$ n'existe pas et $\inf A$ existe

Exercice 4 Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \Big\{a + b, a \in A, b \in \Big\}.$$

1. On suppose A et B majorés. Montrer que $A + B$ est majoré et que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
2. On suppose A et B minorés. Montrer que $A + B$ est minoré et que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
3. On pose $-A = \Big\{ -a, a \in A\Big\}$. Montrer que si A est borné alors $-A$ est aussi borné et que l'on a $\inf(-A) = -\sup A$; $\sup(-A) = -\inf A$.
4. On suppose A et B majorés. Montrer que $A \cup B$ est majoré et que $\sup(A \cup B) = \sup\Big\{ \sup A, \sup B\Big\}$.
5. On suppose A et B minorés. Montrer que si $A \cap \neq \emptyset$, alors $A \cap B$ est aussi minoré et comparer $\in (A \cup B)$ et $\inf\Big\{ \inf A, \inf B\Big\}$. On montrera que $\inf\Big\{ \inf A, \inf B\Big\} \leqslant \sup\Big\{ \sup A, \sup B\Big\} \leqslant \inf(A \cap B)$

6. On suppose $A, B \subset \mathbb{R}_+ = \Big\{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\Big\}$ et on pose $AB = \Big\{ab, a \in A \,\text{et}\, b \in B\Big\}$. Montrer que si A et B sont majorés, alors AB est majoré et on a $\sup AB = \sup A.\sup B$]

Exercice 5

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$

1. **a)** Comparer les inclusion des ensembles $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$;

   b) Montrer que l'on peut avoir $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

   a) A est fermé de $\mathbb{R}$.

   b) Toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A

Exercice 6

1. Définir valeur d'adhérence d'une suite (u_n)
2. Montrer que a est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si a est limite d'une sous-suite de (u_n)
3. Soit (u_n) un suite bornée. définir la limite supérieure $\overline{\lim} u_n$ et la limite inférieure $\underline{\lim} u_n$ de (u_n)

   a) Déterminer $\overline{\lim} u_n$ et $\underline{\lim} u_n$ de (u_n) pour $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$

   b) Quelle est la nature de cette suite ?

Exercice 7

1. Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\overline{A}$ est fermé de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de $\mathbb{R}$ contenant A. (On dit que $\overline{A}$ est la fermeture de A)
3. Montrer que $(A\,\text{fermé}\,) \Longleftrightarrow (A = \overline{A})$
4. Montrer que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
5. Montrer que $(x \in \overline{A}) \Longleftrightarrow$($x$ est limite d'une suite de points de A)
6. Montrer que $(A\,\text{fermé}\,) \Longleftrightarrow$ (Toute suite convergente de points de A a sa limite dans A)
7. Montrer que A borné $\Longleftrightarrow \overline{A}$ borné
8. Déterminer $\overline{A}$ pour : $A =]0,1[$; $A =]a,b[$, $a < b$; $A =]-\infty, 0[$; $A = \Big\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\Big\}$, $A = \mathbb{N}$; $A = \mathbb{Z}$; $A = \mathbb{Q}$. En déduire la nature de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$