Chapitre 1

Nombres complexes, équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Objectifs : L'essentiel à retenir de ce cours repose sur les points suivants :
- Calcul dans $\mathbb{C}$, en particulier les propriétés algébriques de la conjugaison et du module.
- Résolution des équations du premier et du second degré dans $\mathbb{C}$.
- Propriétés de la forme trigonométrique d'un nombre complexe.
- Définition et propriétés des racines n^{mes} d'un nombre complexe.
- Formule d'Euler et formule de Moivre.

Au lycée nous avons vu que l'équation $x^2 + 1 = 0$, n'avait pas de solution dans $\mathbb{R}$. Il faut donc considérer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ qu'on appelle ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Pour le construire, il a été démontré qu'il existe un nombre i vérifiant $i^2 = -1$ tel que tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrive de façon unique sous la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Outre la résolution d'équations, les nombres complexes s'appliquent à la trigonométrie, à la géométrie (comme nous le verrons dans ce chapitre) mais aussi à l'électronique, à la mécanique quantique, etc.

1.1 Forme algébrique

Définition 1.1. *Soit $z \in \mathbb{C}$. L'écriture de z sous **forme algébrique** est donnée par*

$$z = a + ib, \ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

*Le réel a est appelé **partie réelle** de z et on note $a = Re(z)$. Le réel b est appelé **partie imaginaire** de z et on note $b = Im(z)$. Le nombre complexe **conjugué** de z est defini par $\bar{z} = a - ib$.*

*On dit que z est **imaginaire pur** si la partie réelle de z est nulle ($a = 0$), ainsi $z = ib, \ b \in \mathbb{R}$.*

Remarque 1.2.
1. *Tout nombre réel $z = a \in \mathbb{R}$ peut encore s'écrire sous la forme $z = a+0i \in \mathbb{C}$, on conclut que tout nombre réel est un nombre complexe ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).*
2. *L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique. En effet, si $z = a+ib$ et $z' = a' + ib'$ sont deux nombres complexes, on a $z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.*
3. *En résolvant le système $\begin{cases} z = a + ib \\ \bar{z} = a - ib \end{cases}$, on obtient $Re(z) = a = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.*

$$aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Exemple 1.3. *$z = 5 - 7i$ est un nombre complexe avec la partie réelle égale à 5 et la partie imaginaire égale à -7. Le conjugué de z est $\bar{z} = 5 + 7i$.*

Exercice 1.4. *On considère les nombres complexes $z = 3 + 5i$ et $z' = -1 + 2i$. Écrire sous forme algébrique $z_1 = 2z - 3\bar{z'}$, $z_2 = z^2$ et $z_3 = z\bar{z'}$.*

Proposition 1.5. *Soient z, z' deux nombres complexes, $n \in \mathbb{Z}$.*
- $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{zz'} = \bar{z}\ \bar{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $(z' \neq 0)$, $\overline{nz} = n\bar{z}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$,
- *z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$,*
- *z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.*

Application 1.6. *Soient $z_1 = -2 + 11i$, $z_2 = 2 - i$. Écrire sous la forme $a + ib$:*

$$z_1z_2,\ \overline{z_1z_2},\ Re(z_1^2),\ \frac{(z_1 - z_2)^2}{16},\ \frac{z_1}{z_2},\ (z_1 + z_2)(z_1 - z_2),\ z_1^2 - z_2^2,\ \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}.$$

Exercice 1.7. *Démontrer que pour tous nombres complexes z, z_1, z_2, z_3, on a :*
1. *$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1z_2 = z_2z_1$ (commutativité)*
2. *$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (associativité)*
3. *$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (distributivité)*
4. *$0 + z = z + 0 = z$ (élément neutre pour l'addition)*
5. *$z \times 1 = 1 \times z = z$ (élément neutre pour la multiplication)*
6. *z+(-z)=(-z)+z=0 (inverse pour l'addition)*
7. *Si $z = a + ib$, alors $z \times z' = z' \times z = 1$ avec $z' = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{z}$ (inverse pour la multiplication).*

On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

1.2 Forme trigonométrique et exponentielle

Définition 1.8. – *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, $a, b \in \mathbb{R}$. On a $z\bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0$. Alors le **module** de z est le réel positif, noté $|z|$, défini par*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

On a donc par definition $|z|^2 = z\bar{z}$.
- *Tout nombre complexe $z = a + ib$ non nul peut s'écrire sous la **forme trigonométrique***

$$z = r(\cos\theta + \sin\theta) \text{ avec } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R},$$

*où $r = |z|$ et θ est appelé un **argument** de z noté $\arg(z)$ et défini modulo 2π par $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$ ($z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$). L'argument de z qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelé **argument principal** de z.*
- *Tout nombre complexe $z = a + ib$ de module $r = |z|$ et d'argument $\theta = \arg(z)$ peut encore s'écrire sous la **forme exponentielle** :*

$$z = re^{i\theta} \text{ avec } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\ \text{(formules d'Euler)};$$

– *Si* $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ *et* $z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0$, *on a* $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$. *Ainsi*

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2),\ \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

De plus

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{(inégalité triangulaire)};$$

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $\arg(z_1^n) = n\arg(z_1)$;
– $\arg(\bar{z_1}) = -\arg(z_1)$, $\arg(-z_1) = arg(z_1) + \pi$, $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ *et* $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– *Soit* $n \in \mathbb{Z}$, *on a* $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. *Ceci se traduit par*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\ \text{(formule de Moivre)}.$$

Proposition 1.10. *Si* $z = a + ib$ *est un nombre complexe non nul, alors*

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & si\ a > 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & si\ a < 0, b > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & si\ a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2} \times signe(b) & si\ a = 0 \end{cases}$$

où signe(b) *désigne le signe de* b.

Exemple 1.11.
1. *Soit* $z = 1 + i$, *on a* $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, *donc* $z = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ *et par suite* $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\theta$, *d'où* $\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. *La forme trigonométrique de* z *est* $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ *et sa forme exponentielle est* $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. *De même, on peut écrire* $z = 3 + 3\sqrt{3}i = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ *avec* $|z| = 6$ *et* $\arg z = \frac{\pi}{3}$.
3. *Soit* $z = 1 + e^{i\theta}$ *avec* $0 \leq \theta \leq 2\pi$, *alors on a*

$$z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Ainsi
– *si* $\theta \in [0, \pi[$, *alors* $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *et par conséquent* $|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ *et* $\arg z = \frac{\theta}{2}$.
– *si* $\theta = \pi$, *alors z=0.*
– *si* $\theta \in]\pi, 2\pi]$, *alors* $\frac{\theta}{2} \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ *et par conséquent* $|z| = -2\cos\frac{\theta}{2}$ *et* $\arg z = \frac{\theta}{2} + \pi$.

Exercice 1.12.
1. *Soit* $\theta \in [0, 2\pi]$ *un réel, déterminer suivant les valeurs de* θ *le module et un argument des nombres complexes* $1 + e^{in\theta}$, $1 - e^{-i\theta}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. *On considère les nombres complexes* $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ *et* $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
   (a) *Écrire* z_1 *et* z_2 *sous forme algébrique.*
   (b) *Donner les écritures sous forme algébrique, exponentielle et trigonométrique de* $z_1 z_2$.
   (c) *En déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.

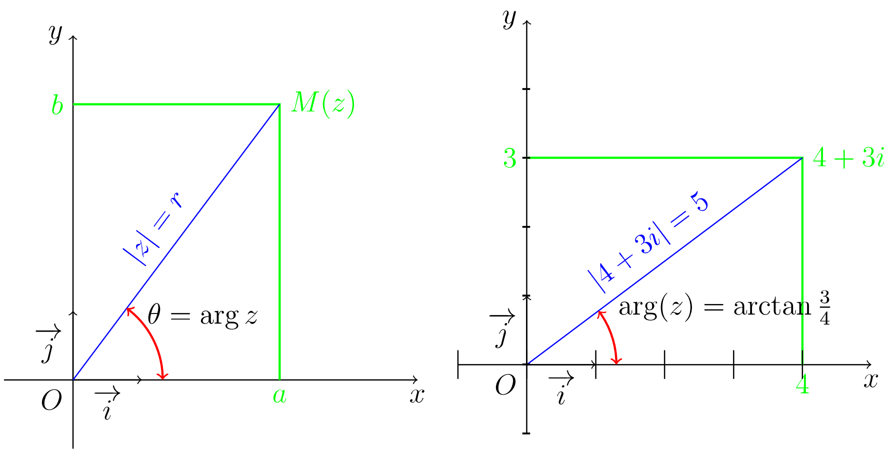
Exercice 1.13. *On considère dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$z^2 = 1 + i. \tag{1.1}$$

1. *Déterminer les solutions de l'équation (1.1) sous la forme exponentielle.*
2. *Déterminer les solutions de l'équation (1.1) sous la forme algébrique.*
3. *Déduire des questions précédentes les valeurs de* $\sin\frac{\pi}{8}$ *et* $\cos\frac{\pi}{8}$.

On appelle **plan complexe** un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Dans le plan complexe, on peut représenter le nombre complexe $z = a+ib$ par le point M de coordonnées (a, b).

- Le point M est appelé **image** de z, et réciproquement z est appelé **affixe** de M.
- $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z et z l'affixe de $\overrightarrow{OM}$. $|z|$ représente la distance OM. On note $M(z)$ pour désigner le point M d'affixe z.
- Si M et M' sont deux points d'affixes z et z', l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est le complexe $z' - z$ et on a la distance $MM' = |z' - z|$.
- Les axes $(O, \overrightarrow{i})$ et $(O, \overrightarrow{j})$ sont appelés respectivement **axe des réels** et **axe des imaginaires**.
- L'argument de z est la mesure principale en radian de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$, c'est-à-dire celui appartenant à $]-\pi,\ \pi]$.



Remarque 1.14. *Si z est un nombre complexe non nul et $\arg(z) = \theta$, alors $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z. On parlera donc de **l'argument** de z pour désigner la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$, c'est-à-dire celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.*

1.4 Application à la trigonométrie

1.4.1 Linéarisation de $\cos^m x \sin^n x$

Les formules d'Euler permettent de transformer $\cos^m x \sin^n x$, $m, n \in \mathbb{N}$ en un polynôme de variables e^{ix} et e^{-ix}. Après développement, en regroupant les termes conjugués, on obtient une combinaison linéaire de $\cos(px)$ et $\sin(qx)$, $p, q \in \mathbb{N}$: c'est la linéarisation.

$$\begin{aligned}
\cos x \sin^2 x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{8}(e^{ix}+e^{-ix})(e^{2ix}-2+e^{-2ix}) \\
&= -\frac{1}{8}(e^{3ix}+e^{-3ix}-(e^{ix}+e^{-ix})) \\
&= -\frac{1}{4}\big(\cos(3x)-\cos x\big).
\end{aligned}$$

Exercice 1.16. *Linéariser* $\sin^5\theta$*,* $\cos^2 x\sin^3 x$*,* $\cos^4\theta$*.*

1.4.2 Calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

D'après la formule de Moivre, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos x + i\sin x)^n.$$

En developpant le membre de droite grâce à la formule de Newton

$$(\cos x + i\sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k} x (i\sin x)^k,\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

et en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.

Exemple 1.17.

1. *Déterminons* i^n *suivant les valeurs de* $n \in \mathbb{N}$*.*
   On a pour $n = 2k$*,* $i^n = i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$*, et pour* $n = 2k+1$*, on obtient* $i^n = i^{2k+1} = i^{2k}i = (-1)^k i$*.*
2. *Pour* $n = 2$ *par exemple, on a* $\cos 2x + i\sin(2x) = (\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x + 2i\cos x\sin x - \sin^2 x$*. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient*

   $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \sin 2x = 2\cos x\sin x.$$

3. *Nous voulons calculer* $\cos 5x$ *et* $\sin 5x$ *en fonction de* $\cos x$ *et* $\sin x$*.*

   $$\begin{aligned}
   A &= \cos 5x + i\sin 5x \\
   &= (\cos x + i\sin x)^5 \\
   &= \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x \\
   &= (\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x) + i(5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x).
   \end{aligned}$$

   On en déduit que

   $$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x,\ \sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x.$$

Exercice 1.18. *À partir des expressions* $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$ *et* $e^{ia}e^{-ib} = e^{i(a-b)}$*, calculer* $\cos(a\pm b)$ *et* $\sin(a\pm b)$*.*

Soit Z un nombre complexe quelconque et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous voulons résoudre l'équation $z^n = Z$, on dit que z est une racine n-ième de Z. Pour cela,
- Si $Z = 0$, il y a une unique solution $z = 0$.
- Supposons $Z \neq 0$, puis écrivons Z sous la forme exponentielle $Z = |Z|e^{i\alpha}$. Nous cherchons z sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$. Ainsi

$$\begin{aligned} z^n = Z &\Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = |Z|e^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow |z|^n = |Z| \text{ et } n\theta = \alpha + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|Z|} \text{ et } \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Les racines n-ièmes de Z sont donc

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dans le cas particulier où $Z = 1 = 1e^{0i}$, les racines n-ièmes de l'unité sont données par

$$\sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Si z_k sont les racines n-ièmes de Z, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\alpha}{n}} \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0.$$

On conclut que la somme des racines n-ièmes de Z est nulle.

Exemple 1.19. *Résoudre l'équation $z^3 = 8i$.*

$$z^3 = 8i \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow |z| = \sqrt[3]{8} = 2 \textit{ et } \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2.$$

On a donc $z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$ *et* $z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$.

En général, il n'est toujours pas facile d'écrire Z sous forme exponentielle. Ceci nous amène à considerer une autre méthode pour calculer les racines carrées d'un nombre complexe Z.
Posons $Z = X + iY$, on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z$.

$$z^2 = Z \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = X + iY \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = X & (a) \\ 2xy = Y. & (b) \end{cases}$$

De plus $|Z| = |z^2| = |z|^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}(c)$.
Les relations (a) et (c) donnent x et y au signe près. La relation (b) permet de décider sur les signes de x et y.

Exemple 1.20. *On veut déterminer les racines carrées de $Z = 3 - 4i$, ou encore résoudre l'équation $z^2 = 3 - 4i$. On pose $z = x + iy$, alors*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \textit{ et } y = -1 \\ \textit{ou} \\ x = -2 \textit{ et } y = 1. \end{cases}$$

Les racines carrées cherchées sont donc

$$z_1 = 2 - i \textit{ et } z_2 = -2 + i.$$

Exercice 1.21. *Déterminer les racines cinquièmes de $16\sqrt{2}(1 - i)$ et les racines quatrièmes de $-7 + 24i$.*

Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, on calcule une racine carrée δ de Δ comme dans la section précédente. L'équation admet deux racines complexes

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}; \; z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Exemple 1.22. *Résolvons l'équation $2z^2 - (1+5i)z - 2(1-i) = 0$.*
On a $\Delta = (1+5i)^2 + 16(1-i) = -8-6i$. Cherchons $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$(x+iy)^2 = -8-6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x^2-y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \\ xy < 0. \end{cases}$$

On conclut que $\delta = 1-3i$ ou $\delta = -1+3i$. Les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{1+5i+(1-3i)}{4} = \frac{1+i}{2}, \; z_2 = \frac{1+5i-(1-3i)}{4} = 2i.$$

1.7 Travaux dirigés

1. Mettre sous la forme $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, les nombres complexes suivants :
$$\frac{3+6i}{3-4i}, (2+3i)^2, \; \frac{1}{2-3i}, \; \frac{2-3i}{1+i}, \; \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}, \; i^n \; (n \in \mathbb{N}).$$
2. Mettre sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants :
$$i, \; -3, \; -4i, \; \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}, \; -\frac{4}{1+i\sqrt{3}}, \; \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}, \; \frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}.$$
3. Mettre sous forme algébrique puis trigonométrique le nombre complexe $z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Calculer z^3.
4. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est un réel.
5. Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$, $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$, $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$.
6. Trouver les entiers naturels n tels que
   (a) $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif ;
   (b) $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un nombre imaginaire pur.
7. Soit $z = e^{i\theta}$. Déterminer le module et un argument de $1+z$, $1+z+z^2$.
8. Déterminer le module et un argument des nombres complexes :
$$u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}, \; v = 1-i, \; w = \frac{u}{v}, \; e^{e^{i\alpha}}, \; e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

10. Soit z un nombre complexe tel que $1+z^4+z^8=0$. Montrer que z est racine douzième de l'unité.
11. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ puis déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.
12. Calculer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
    (a) $z^2=-7+24i$
    (b) $z^2=-3-4i$
    (c) $z^2-2(2+i)z+6+8i=0$
    (d) $z^2+z+1=0$
    (e) $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$
    (f) $16(z-1)^4+(z+1)^4=0$
    (g) $z^2-z+2=0$
    (h) $z^2-2^{\theta+1}\cos\theta z+2^{2\theta}=0$
    (i) $2z^2(1-\cos 2\theta)-2z\sin 2\theta+1=0,\ \theta\in]0,\pi[$
    (j) $z^2-2e^{i\theta}z+2i\sin\theta e^{i\theta}=0$ (on écrira les racines sous la forme trigonométrique)
    (k) $4iz^3+2(1+3i)z^2-(5+4i)z+3(1-7i)=0$ (chercher une racine réelle)
    (l) $z^3-(5-3i)z^2+(6-11i)z+2+16i=0$ (chercher une racine imaginaire pure)
14. Donner sous forme exponentielle, les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^6+(7-i)z^3-8-8i=0$.
15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(z-1)^5=(z+1)^5,\ (z-i)^n=(z+i)^n.$$

16. Déterminer les couples de complexes solutions du système d'équations

$$\begin{cases}(3+2i)z_1+iz_2=1+2i\\ 2z_1-(1+i)z_2=i-3.\end{cases}$$

    En déduire les couples de complexes solutions du système d'équations

$$\begin{cases}(3-2i)z_1-iz_2=1-2i\\ 2z_1-(1-i)z_2=-i-3.\end{cases}$$

17. Déterminer les racines cinquièmes de $-i$, les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$, et les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1+i),\ 2-2i,\ 11+2i$.
18. Soient les points A et B d'affixes respectifs $z_A=3+3i$ et $z_B=3-3i$.
    (a) Calculer les modules de z_A et z_B, puis déduire la nature du triangle OAB.
    (b) Calculer les arguments de z_A et z_B puis déduire l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.
    (c) Que pouvons-nous conclure des questions précédentes sur le triangle OAB ?
19. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$(a)\ |z-3i|=5,\ (b)\ \left|\frac{z-3}{z-5}\right|=1,\ (c)\ \left|\frac{z-3}{z-5}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sum_{k=0} \left(e^{i\theta}\right)^k,$$

puis en déduire les sommes

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta),\ \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Indication : on pourra utiliser l'exercice 1.12.

21. Linéariser $\cos^7 x$,
22. Calculer $\frac{\sin 6x}{\sin x}$ en fonction de $\cos x$.
23. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ nombres réels et $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$. Montrer que si $p(z) = 0$ alors $p(\bar{z}) = 0$.
24. Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle les deux racines de l'équation $z^2 - (2 + i\alpha)z + i\alpha + 2 - \alpha = 0$ sont complexes conjuguées. calculer alors les solutions.
25. (a) Déterminer le module et un argument de $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ en discutant suivant la valeur du réel α.
    (b) Soit $z' = \frac{1-i}{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}$ où $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Calculer en fonction de α le module et un argument de z'.
26. Déterminer z pour que z, $z-1$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module.
27. Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Calculer $1 + u + u^2 + u^3 + u^4$. En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
28. On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.
    (a) Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
    (b) Calculer $S + T$ et ST. En déduire S et T.